



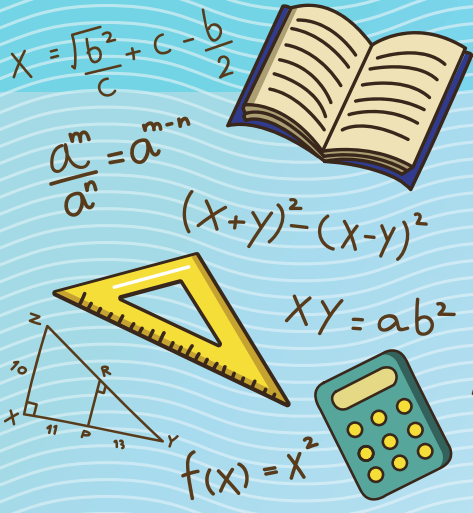
प्रश्न बैंक-सह-उत्तर पुस्तक

Question Bank-Cum-Answer Book

2023

Class-10

गणित
(MATHEMATICS)



झारखण्ड शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद्, राँची
Jharkhand Council of Educational Research and Training, Ranchi

प्रश्न बैंक-सह-उत्तर पुस्तक
Question Bank-Cum-Answer Book

Class - 10

गणित
Mathematics



2023

झारखण्ड शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद्, राँची
Jharkhand Council of Educational Research and Training, Ranchi

© झारखंड शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद्, राँची, झारखंड

सर्वाधिकार सुरक्षित

- ◆ प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना इस पुस्तक के किसी भाग को छापना तथा इलेक्ट्रॉनिकी, मशीनी, छायाप्रतिलिपि अथवा किसी अन्य विधि से पुनः प्रयोग द्वारा उसका संग्रहण अथवा प्रसारण वर्जित है।
- ◆ प्रकाशक की पूर्व अनुमति के बिना यह पुस्तक अपने मूल आवरण या जिल्द के साथ अथवा किसी अन्य प्रकार से व्यापार द्वारा उधारी या किराए पर न दी जाएगी, न बेची जाएगी।
- ◆ क्रय-विक्रय दण्डनीय अपराध

झारखंड शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद्, राँची, झारखंड द्वारा प्रकाशित

प्राक्कथन

बच्चों के लिए निर्धारित अधिगम प्रतिफल प्राप्त करने का मार्ग सरल एवं सुगम होना आवश्यक है। इस उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए झारखंड शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद्, राँची, झारखंड के द्वारा कक्षा 10 के सभी विषयों के लिए प्रश्न बैंक—सह—उत्तर पुस्तक का निर्माण बच्चों के अधिगम कौशल को सुगमतापूर्वक विकसित करने एवं झारखंड अधिविद्य परिषद् द्वारा आयोजित वार्षिक माध्यमिक बोर्ड की परीक्षा के लिए उन्हें तैयार करने के उद्देश्य से किया गया है। इस प्रश्न बैंक—सह—उत्तर पुस्तक में सरल भाषा एवं रुचिकर ढंग से विषय—वस्तु को स्पष्ट करते हुए प्रश्नोत्तर दिए गए हैं। इस प्रश्न बैंक—सह—उत्तर पुस्तक के माध्यम से बच्चों में न केवल ज्ञानजन्य प्रतिभा का विकास होगा बल्कि आज के इस प्रतियोगिता के दौर में भी वे अनुकूल सफलता पाएंगे। हमारे प्रयत्न की सफलता इस बात पर निर्भर करती है कि विद्यालय के शिक्षकवृन्द बच्चों की कल्पनाओं के साथ कितना जुड़ पाते हैं और विभिन्न प्रकार के प्रश्नोत्तरों को सीखने—सिखाने के दौरान अपने अनुभवों के साथ—साथ बच्चों के विचारों के साथ कैसे सामंजस्य बनाते हैं।

इस प्रश्न बैंक—सह—उत्तर पुस्तक में झारखंड अधिविद्य परिषद् द्वारा आयोजित वार्षिक माध्यमिक बोर्ड की परीक्षा में पूछे जाने वाले प्रश्नों के विविध प्रकारों यथा— बहुवैकल्पिक, अतिलघु उत्तरीय, लघु उत्तरीय एवं दीर्घ उत्तरीय प्रश्न आदि के अंतर्गत पर्याप्त मात्रा में प्रश्नोत्तर समाहित किए गए हैं ताकि इसके अध्ययन से छात्रों में ना केवल विषय—वस्तु की समझ विकसित हो बल्कि उन्हें सीखने के प्रतिफल की भी प्राप्ति हो, साथ ही वार्षिक माध्यमिक बोर्ड की परीक्षा के लिए उनकी अच्छी तैयारी हो सके और वे परीक्षा में बेहतर प्रदर्शन करते हुए सफलता प्राप्त कर सकें।

अंत में मैं इन पुस्तकों के लेखकों के प्रति आभार व्यक्त करता हूँ।

शुभकामनाओं के साथ।

के० रवि कुमार भा.प्र.से.

सचिव

स्कूली शिक्षा एवं साक्षरता विभाग, झारखण्ड

भूमिका

प्रिय शिक्षक एवं विद्यार्थी,

जोहार !

हमें कक्षा 10 के विभिन्न विषयों के प्रश्न बैंक-सह-उत्तर पुस्तक से आपका परिचय कराने में प्रसन्नता हो रही है। इस प्रश्न बैंक-सह-उत्तर पुस्तक में झारखण्ड शैक्षिक अनुसन्धान एवं प्रशिक्षण परिषद्, राँची द्वारा प्रकाशित पाठ्यपुस्तकों के विषयवार एवं अध्यायवार अधिगम बिन्दुओं को समायोजित करते हुए झारखण्ड अधिविद्य परिषद् द्वारा आयोजित वार्षिक माध्यमिक परीक्षा में पूछे जानेवाले प्रश्नों के विविध प्रकारों के अंतर्गत पर्याप्त मात्रा में प्रश्नों का समावेश किया गया है। इस विषय आधारित प्रश्न बैंक-सह-उत्तर पुस्तक के निर्माण का उद्देश्य शिक्षण अधिगम प्रक्रिया को और अधिक रुचिकर, सरल एवं प्रभावशाली बनाना तथा विद्यार्थियों को बोर्ड परीक्षा की तैयारियों में सहयोग प्रदान करना है, जिससे सकारात्मक रूप से छात्रों को सीखने के प्रतिफल प्राप्त हों और बोर्ड परीक्षा में वे बेहतर प्रदर्शन कर सकें। राज्य के विभिन्न जिलों से चयनित अनुभवी शिक्षकों के द्वारा इस प्रश्न बैंक-सह-उत्तर पुस्तक का निर्माण किया गया है।

इस प्रश्न बैंक-सह-उत्तर पुस्तक की प्रमुख विशेषताएँ यह हैं कि इनमें प्रश्नों के उत्तर को सरल भाषा में प्रस्तुत करते हुए वैचारिक समझ (Conceptual Understanding) विकसित करने पर जोर दिया गया है। साथ ही इन पुस्तकों में झारखण्ड अधिविद्य परिषद् द्वारा आयोजित वार्षिक माध्यमिक बोर्ड परीक्षा – 2023 के प्रश्नोत्तर को भी समाहित किया गया है। इन पुस्तकों के माध्यम से न केवल विद्यार्थियों की प्रतिभा में निखार आएगा बल्कि वर्तमान समय के प्रतियोगिताओं के इस दौर में वे अनुकूल एवं अपेक्षित सफलता प्राप्त करने में भी सक्षम हो सकेंगे। आशा है कि यह प्रश्न बैंक-सह-उत्तर पुस्तक आपको पसंद आएगी एवं आपके लिए उपयोगी सिद्ध होगी।

शुभकामनाओं के साथ।

किरण कुमारी पासी भा.प्र.से.

निदेशक

झारखण्ड शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद्
राँची, झारखण्ड

पाठकों से अनुरोध

इस प्रश्न बैंक-सह-उत्तर पुस्तक के निर्माण में काफी सावधानियाँ बरती गई हैं। इसके बावजूद यदि किसी प्रकार की अशुद्धियाँ मिलें या कोई सुझाव हो तो इस email ID :- jcertquestionbank@gmail.com पर सूचित करें, ताकि अगले मुद्रण में इसे शुद्ध रूप से प्रस्तुत किया जा सके।

प्रश्न बैंक—सह—उत्तर पुस्तक निर्माण समिति

मुख्य संरक्षक

श्री के० रवि कुमार (भा.प्र.से.)

सचिव

स्कूली शिक्षा एवं साक्षरता विभाग, झारखण्ड

संरक्षक

श्रीमती किरण कुमारी पासी (भा.प्र.से.)

निदेशक

झारखण्ड शैक्षिक अनुसन्धान एवं प्रशिक्षण परिषद्, राँची

अवधारणा एवं मार्गदर्शन

श्री मुकुंद दास उपनिदेशक (प्र.) झारखण्ड शैक्षिक अनुसन्धान एवं प्रशिक्षण परिषद्, राँची	श्री बाँके बिहारी सिंह सहायक निदेशक (अ.) झारखण्ड शैक्षिक अनुसन्धान एवं प्रशिक्षण परिषद्, राँची	श्री मसुदी टुडू सहायक निदेशक (अ.) झारखण्ड शैक्षिक अनुसन्धान एवं प्रशिक्षण परिषद्, राँची
---	--	---

समन्वय एवं निर्देशन

डॉ० नीलम रानी

संकाय सदस्य, जे.सी.ई.आर.टी., राँची

(टी.जी.टी., सामाजिक विज्ञान, राजकीयकृत उत्क्रमित उच्च विद्यालय पैतानो, जलडेगा, सिमडेगा)

सहयोग

श्री मणिलाल साव

संकाय सदस्य, जे.सी.ई.आर.टी., राँची

(पी.जी.टी. जीव विज्ञान, के. एन. +2 उच्च विद्यालय हरनाद, कसमार, बोकारो)

प्रश्न बैंक निर्माण कार्य समिति

Kundan Kumar

TGT (Mathematics/Physics)
Upgraded High School, Banpur, Angara, Ranchi

Mithilesh Kumar Pathak

TGT (Mathematics/Physics)
Model School, Kanke, Ranchi

Anita Suman Bara

TGT (Mathematics/Physics)
B.I.T. +2 High School, Mesra, Ranchi

Jharkhandlab.com

विषय सूची

क्रमांक	अध्याय का नाम	पृष्ठ संख्या
अध्याय – 01	वास्तविक संख्याएँ	1 - 3
अध्याय – 02	बहुपद	4 - 6
अध्याय – 03	दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म	7 - 10
अध्याय – 04	द्विघात समीकरण	11 - 13
अध्याय – 05	समांतर श्रेढ़ियाँ	14 - 17
अध्याय – 06	त्रिभुज	18 - 23
अध्याय – 07	निर्देशांक ज्यामिति	24 - 28
अध्याय – 08	त्रिकोणमिति का परिचय	29 - 32
अध्याय – 09	त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग	33 - 36
अध्याय – 10	वृत्त	37 - 41
अध्याय – 11	रचनाएँ	42 - 43
अध्याय – 12	वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल	44 - 49
अध्याय – 13	पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन	50 - 56
अध्याय – 14	सांख्यिकी	57 - 62
अध्याय – 15	प्रायिकता	63 - 65
	JAC वार्षिक माध्यमिक परीक्षा, 2023 - प्रश्नोत्तर	66-76

Jharkhandlab.com

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

- 140 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है—
 (a) $2 \times 2 \times 5 \times 7$ (b) $2 \times 2 \times 3 \times 5$
 (c) $5 \times 7 \times 11 \times 7$ (d) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$
- 156 को अभाज्य गुणनखंडों के रूप में लिखा जा सकता है—
 (a) $2 \times 2 \times 3 \times 1$ (b) $2 \times 2 \times 5 \times 13$
 (c) $2 \times 2 \times 3 \times 13$ (d) $2 \times 3 \times 5 \times 7$
- यदि 156 का अभाज्य गुणनखंड $2^x \times 3 \times 13$ के रूप में है तो, x का मान निम्न में से चुनें—
 (a) 0 (b) 1
 (c) -1 (d) 2
- यदि $HCF(510, 92) = 2$ है, तो $LCM(510, 92)$ का मान निम्न में से चुनें—
 (a) 23460 (b) 24360
 (c) 23470 (d) 22360
- धनात्मक संख्या $6q+5$ के रूप का है, तो यह संख्या निम्न में से क्या है?
 (a) सम (b) विषम
 (c) अपरिमेय (d) 0
- दो धनात्मक पूर्णांक a तथा b दिए रहने पर यदि अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q और r विद्यमान हैं, तो निम्न में से कौन सा कथन सत्य है ?
 (a) $a = bq + r$ (b) $a = bq - r$
 (c) $a = b/q - r$ (d) $a = b/q + r$
- निम्न में से कौन सी संख्या अपरिमेय संख्या है?
 (a) 17 (b) 0
 (c) $\sqrt{225}$ (d) π
- $5+2\sqrt{3}$ किस प्रकार की संख्या है?
 (a) परिमेय (b) विषम
 (c) अपरिमेय (d) सम
- $2\sqrt{3}$ किस प्रकार की संख्या है?
 (a) परिमेय (b) अपरिमेय
 (c) सम (d) विषम
- यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका $a=bq+r$ में b क्या है?
 (a) भाज्य (b) भाजक
 (c) शेषफल (d) भागफल
- π किस प्रकार की संख्या है?
 (a) परिमेय (b) अपरिमेय
 (c) सम (d) विषम

12. $HCF(a,b) \times LCM(a,b) = a \times b$, जहाँ a, b कोई धनात्मक पूर्णांक है—

- (a) b (b) ab
 (c) a (d) ba

हल (Solution)

1 (a), 2 (c), 3 (d), 4 (c), 5 (b), 6 (a), 7 (d), 8 (c), 9 (b), 10 (b), 11 (b), 12 (a)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

13. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका क्या है?
 हल. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका— माना a और b कोई दो धनात्मक पूर्णांक हैं। तब दो अद्वितीय पूर्ण संख्याएँ q और r इस प्रकार अस्तित्व रखती है कि—
 $a = bq + r$, जहाँ $0 \leq r < b$
 यहां हम a को भाज्य, b को भाजक, q को भागफल तथा r को शेषफल कहते हैं।
 वैकल्पिक रूप में,
 भाज्य = भाजक \times भागफल + शेषफल
14. $HCF(306, 567) = 9$ दिया है। $LCM(306, 567)$ ज्ञात कीजिए।
 हल. $HCF(306, 567) = 9$ दिया है
 $LCM(306, 567)$ ज्ञात करना है।
 हम जानते हैं यदि a और b कोई दो प्राकृत संख्याएँ हैं, तो
 $HCF(a,b) \times LCM(a,b) = a \times b$ होता है।
 $\therefore HCF(306, 567) \times LCM(306, 567) = 306 \times 567$
 $\therefore LCM(306, 567) = \frac{306 \times 567}{HCF(306, 567)}$
 $\therefore LCM(306, 567) = \frac{306 \times 567}{9}$
 $\therefore LCM(306, 567) = 22338$
15. निम्न परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत है या असांत
 (a) $\frac{13}{3125}$ (b) $\frac{35}{50}$
 (c) $\frac{17}{8}$
 हल. (a) $\frac{13}{3125}$

$$\frac{13}{3125} = \frac{13}{5^5}$$

यहाँ, $q = 5^5$ जो $2^n \times 5^m$ के रूप का है। ($n=0, m=5$)

अतः परिमेय संख्या $\frac{13}{3125}$ का दशमलव प्रसार सांत है।

(b) $\frac{35}{50}$

$$\frac{35}{50} = \frac{7}{10} = \frac{7}{5 \times 2}$$

यहाँ $q = 2 \times 5$ जो $2^n \times 5^m$ के रूप का है। ($n=1, m=1$)

अतः परिमेय संख्या $\frac{35}{50}$ का दशमलव प्रसार सांत है।

(c) $\frac{17}{8}$

$$\frac{17}{8} = \frac{17}{2^3}$$

यहाँ $q = 2^3$ जो $2^n \times 5^m$ के रूप का है। ($n=3, m=0$)

अतः परिमेय संख्या $\frac{17}{8}$ का दशमलव प्रसार सांत है।

16. तीन अपरिमेय संख्याओं का उदाहरण दें।

हल. तीन अपरिमेय संख्याओं का उदाहरण :

(a) $\sqrt{2}$ (b) $5\sqrt{3}$ (c) π

17. 26 और 91 का HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF \times LCM

हल. 26 और 91

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)26} \\ 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \overline{)91} \\ 13 \end{array}$$

$$26 = 2 \times 13$$

$$91 = 7 \times 13$$

$$\therefore \text{HCF}(26 \text{ और } 91) = 13$$

$$\text{और LCM}(26 \text{ और } 91) = 2 \times 7 \times 13 = 182$$

$$\text{जाँच दो संख्याओं का गुणनफल} = 26 \times 91 = 2366$$

$$\text{LCM} \times \text{HCF} = 182 \times 13 = 2366$$

$$\text{अतः दो संख्याओं का गुणनफल} = \text{HCF} \times \text{LCM}.$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

18. दर्शाइए कि $5-\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्या है।

हल. माना $5-\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। तब हम सहअभाज्य ऐसी दो संख्याएँ a और b ($b \neq 0$) ज्ञात कर सकते हैं कि $5-\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ हो। इस समीकरण को पुनर्व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} \quad (1)$$

चूँकि $5, a$ और b पूर्णांक है, इसलिए $5 - \frac{a}{b}$ एक परिमेय संख्या है।

[\therefore परिमेय संख्याओं का योग, अंतर, गुणनफल या भागफल (शून्येतर परिमेय संख्या से) एक परिमेय संख्या होती है]।

इसलिए $\sqrt{3}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु इससे इस तथ्य का विरोधाभास होता है कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। हमें यह विरोधाभास अपनी गलत कल्पना के कारण प्राप्त हुआ है कि $5-\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $5-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

19. दर्शाइए कि एक धनात्मक विषम पूर्णांक $4q+1$ अथवा $4q+3$ के रूप का होता है, जहाँ q एक पूर्णांक है।

हल:—मान लीजिए a और b दो धनात्मक विषम पूर्णांक हैं।

जहाँ a, b से बड़ा है ($a > b$)। माना $b = 4r$ है।

तब यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से, किसी पूर्णांक $q > 0$ के लिए $a = 4q + r$ है जहाँ $0 \leq r < 4$ है।

इसलिए, $r = 0, 1, 2, 3$ के लिए $a = 4q, a = 4q+1, a = 4q+2$ या $a = 4q+3$ के रूप का हो सकता है, जहाँ q भागफल है।

चूँकि a एक विषम पूर्णांक है, इसलिए यह $4q$ और $4q+2$ के रूप का नहीं हो सकता (क्योंकि दोनों 2 से विभाज्य होने के कारण सम है)।

इसलिए, कोई भी धनात्मक विषय पूर्णांक $4q+1$ या $4q+3$ के रूप का होगा।

20. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ अपरिमेय संख्या है।

हल. हम इसके विपरीत यह मान लेते हैं कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः हम दो ऐसे पूर्णांक r और s ज्ञात कर सकते हैं कि $\sqrt{5} = \frac{r}{s}$ हो तथा $s \neq 0$ हो। माना r और s में, 1 के अतिरिक्त, कोई अभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। तब हम इस अभयनिष्ठ गुणनखण्ड से r और s को विभाजित करके $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ प्राप्त करते हैं, जहाँ a और b सहअभाज्य है।

$$\text{अतः } b\sqrt{5} = a \text{ है।}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करके तथा पुनर्व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$5b^2 = a^2$$

अतः $5, a^2$ को विभाजित करता है।

इसलिए $5, a$ को भी विभाजित करेगा।

$$\text{अतः } a = 5c \quad (\text{माना})$$

जहाँ c कोई पूर्णांक है।

a के इस मान को $5b^2 = a^2$ में प्रतिस्थापित करने पर $5b^2 = 25c^2$

$b^2 = 5c^2$ प्राप्त होता है।

इसका अर्थ है कि 5, b^2 को विभाजित करता है। इसलिए 5, b को भी विभाजित करेगा।

अतः a और b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 5 है परन्तु इससे विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b में 5 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

यह विरोधाभास हमें इस कारण प्राप्त हुआ है, क्योंकि हमने एक त्रुटिपूर्ण कल्पना कर ली है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

21. सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल. हमें सिद्ध करना है कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। हम इसके विपरीत यह मान लेते हैं कि $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात्, हम सहअभाज्य ऐसी दो संस्थाएं a और b

($b \neq 0$) ज्ञात कर सकते हैं कि—

$$3+2\sqrt{5} = \frac{a}{b} \text{ है।}$$

अतः $\frac{a}{b} - 3 = 2\sqrt{5}$

$$\Rightarrow \frac{a-3b}{b} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \frac{a-3b}{2b} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{a}{2b} - \frac{3}{2} = \sqrt{5}$$

चूँकि 2, 3, a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a}{2b} - \frac{3}{2}$ एक परिमेय संख्या है अर्थात् $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है परन्तु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। हमें यह विरोधाभास अपनी गलत कल्पना के कारण प्राप्त हुआ है कि $3+2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

22. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी घनात्मक पूर्णांक का घन $9m, 9m+1$ या $9m+8$ के रूप का होता है।

हल. मान लीजिए a कोई घनात्मक पूर्णांक है। हम a और $b=3$ में यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करते हैं।

चूँकि $0 \leq r < 3$ है, इसलिए संभावित शेषफल 0, 1 और 2 है, अर्थात् a संख्याओं $3q, 3q+1$ या $3q+2$ के रूप में हो सकता है, जहाँ q भागफल है।

अब $(3q)^3 = 27q^3 = 9(3q^3) = 9m$ जहाँ, $m = 3q^3$

$$\begin{aligned} (3q+1)^3 &= (3q)^3 + 3(3q)^2(1) + 3(3q)(1)^2 + (1)^3 \\ &= 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1 \\ &= 9(3q^3 + 3q^2 + q) + 1 = 9m+1 \text{ जहाँ, } m = 3q^3 + 3q^2 + q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{और } (3q+2)^3 &= (3q)^3 + 3(3q)^2(2) + 3(3q)(2)^2 + (2)^3 \\ &= 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8 \\ &= 9(3q^3 + 6q^2 + 4q) + 8 \\ &= 9m + 8 \text{ जहाँ, } m = 3q^3 + 6q^2 + 4q \end{aligned}$$

अतः किसी घनात्मक पूर्णांक का घन $9m, 9m+1$ या $9m+8$ रूप का होता है।

23. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके 4052 और 12576 का HCF ज्ञात करें।

हल. हमें यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके 4052 और 12576 का HCF ज्ञात करना है।

चरण 1. यहाँ $12576 > 4052$ है। हम 12576 और 4052 पर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके निम्नलिखित प्राप्त करते हैं:

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

चरण 2. क्योंकि शेषफल $420 \neq 0$ है, इसलिए हम 4052 पर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके निम्नलिखित प्राप्त करते हैं:

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

चरण 3. क्योंकि शेषफल $272 \neq 0$ है, इसलिए हम भाजक 420 और नए शेषफल 272 को लेकर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके निम्नलिखित प्राप्त करते हैं:

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

चरण 4. क्योंकि शेषफल $148 \neq 0$ है, इसलिए हम भाजक 272 और नए शेषफल 148 को लेकर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके निम्नलिखित प्राप्त करते हैं:

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

चरण 5. क्योंकि शेषफल $124 \neq 0$ है, इसलिए, हम भाजक 148 और नए शेषफल 124 को लेकर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके निम्नलिखित प्राप्त करते हैं:

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

चरण 6. क्योंकि शेषफल $24 \neq 0$ है, इसलिए हम भाजक 124 और नए शेषफल 24 को लेकर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके निम्नलिखित प्राप्त करते हैं:

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

चरण 7. क्योंकि शेषफल $4 \neq 0$ है, इसलिए भाजक 24 और नए शेषफल 4 को लेकर यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके निम्नलिखित प्राप्त करते हैं:

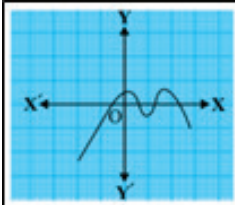
$$24 = 4 \times 6 + 0$$

यहाँ शेषफल 0 प्राप्त हो गया है। इसलिए प्रक्रिया यहाँ समाप्त हो जाती है। चूँकि इस स्थिति में भाजक 4 है, इसलिए 4052 और 12576 का H.C.F 4 है।

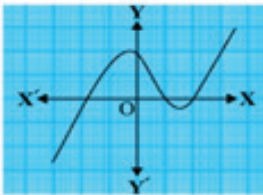
वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए :

- यदि बहुपद x^2-9x+a के शून्यकों का गुणनफल 8 है, तब इसके शून्यक हैं:
 - 1,-8
 - 1,-8
 - 1,8
 - 1,8
- किसी बहुपद $p(x)$ के लिए ग्राफ आकृति में दिया गया है। बहुपद के शून्यकों की संख्या निम्न में से चुनें :-



- 4
 - 1
 - 2
 - 3
- x^2-15 का शून्यक होगा :
 - $\sqrt{15}$
 - $-\sqrt{15}$
 - a तथा b दोनों
 - इनमें से कोई नहीं
 - यदि शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः 3 और -2 हो तो, द्विघात बहुपद क्या होगा ?
 - x^2+3x-1
 - x^2+3x-2
 - x^2-3x-2
 - x^2+x-3
 - किसी बहुपद $p(x)$ के लिए ग्राफ आकृति में दिया गया है। बहुपद के शून्यकों की संख्या कितनी होगी ?



- 0
 - 1
 - 2
 - 3
- बहुपद $4u^2+8u$ का शून्यक होगा :
 - 0
 - 1/2
 - 2
 - a तथा c दोनों
 - द्विघात बहुपद $x^2-7x+12$ के शून्यकों का योग निम्न में से चुनें:-
 - 6
 - 7

- 7
- 12

- बहुपद $3x^2-12x$ का शून्यक निम्न में से चुनें :-
 - 0,4
 - 0,-4
 - 1,4
 - 0,-2
- द्विघात बहुपद $x^2+7x+10$ के शून्यकों का गुणनफल निम्न में से चुनें:
 - 10
 - 7
 - 3
 - 10/7
- घात 1 के बहुपद को बहुपद कहते हैं।
 - द्विघात
 - रैखिक
 - त्रिघात
 - इनमें से कोई नहीं

हल (Solution)

- 1 (d), 2 (a), 3 (c), 4 (c), 5 (d), 6 (d), 7(b), 8 (a), 9 (a), 10 (b)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

- एक द्विघात बहुपद के अधिक से अधिक कितने शून्यक हो सकते हैं और त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक कितने शून्यक हो सकते हैं।

हल. एक द्विघात बहुपद के अधिक से अधिक 2 शून्यक हो सकते हैं और एक त्रिघात बहुपद के अधिक से अधिक 3 शून्यक हो सकते हैं।

- द्विघात बहुपद x^2-2x-8 के शून्यक ज्ञात कीजिए।

हल. हमें द्विघात बहुपद x^2-2x-8 के शून्यक ज्ञात करना है।

$$\text{माना } p(x) = x^2-2x-8$$

$$\text{तब } p(x) = x^2-2x-8$$

$$= x^2-4x-2x-8 \text{ (मध्य पद को विभक्त करने पर)}$$

$$= x(x-4) + 2(x-4)$$

$$= (x-4)(x+2)$$

$p(x)$ के शून्यकों के लिए

$$P(x) = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x-4 = 0 \text{ या } x+2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ या } x = -2$$

$$\therefore x = 4, -2$$

अतः $P(x)$ के शून्यक 4 और -2 हैं।

- यदि द्विघात बहुपद $p(x) = ax^2+bx+c$ के शून्यक α और β हैं, तो बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध बताइए।

हल. यदि द्विघात बहुपद $p(x) = ax^2 + bx + c$ के शून्यक α और β हैं, तो बहुपद के शून्यकों और गुणांकों में संबंध—

$$\alpha + \beta = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-b}{a}$$

$$\text{तथा } \alpha \times \beta = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \frac{-c}{a}$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

14. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः (4, 1) है।

हल. एक द्विघात बहुपद ज्ञात करना है जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः 4, 1 हैं।

माना द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β हैं।

$$\text{तब } \alpha + \beta = 4 = \frac{-b}{a}$$

$$\text{और } \alpha \times \beta = 1 = \frac{c}{a}$$

$$\text{इसलिए } \frac{4}{1} = \frac{-b}{a}$$

$$\text{तथा } \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$$

यदि $a = 1$ है, तो $b = -4$ और $c = 1$ होगा।

अतः अभीष्ट द्विघात बहुपद $x^2 - 4x + 1$ है।

15. एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः $(0, \sqrt{5})$ है।

हल. एक द्विघात बहुपद ज्ञात करना है जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः $0, \sqrt{5}$ है।

माना द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β हैं।

$$\text{तब } \alpha + \beta = 0 = \frac{-b}{a}$$

$$\text{और } \alpha \times \beta = \sqrt{5} = \frac{-b}{a}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{0}{1} = \frac{-b}{a}$$

$$\text{और } \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{c}{a}$$

यदि $a = 1$ है, तो $b = 0$ और $c = \sqrt{5}$ होगा।

अतः एक द्विघात बहुपद, जिसमें दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 + \sqrt{5}$ है।

16. विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके $p(x) = x^4 - 5x + 6$, $g(x) = 2 - x^2$ में $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात करें।

हल. दिया है $p(x) = x^4 - 5x + 6$, $g(x) = 2 - x^2$

$p(x)$ मानक रूप में है। $g(x)$ मानक रूप में, $-x^2 + 2$ है। अब हम दिए गए बहुपदों $p(x)$ और $g(x)$ पर विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करते हैं।

$$\begin{array}{r} -x^2 + 2 \overline{) x^4 - 5x + 6} \\ \underline{-(x^4 - 2x^2)} \\ 2x^2 - 5x + 6 \\ \underline{-(2x^2 - 4)} \\ -5x + 10 \\ \underline{-(-5x + 10)} \\ 0 \end{array}$$

हम यहाँ रुक जाते हैं

क्योंकि शेषफल $(-5x + 10)$ की घात 1, भाजक $(-x^2 + 2)$ की घात 2 से कम है। इसलिए भाग की क्रिया करके शेषफल $-5x + 10$ और भागफल $-x^2 - 2$ प्राप्त होता है। अब

$$\begin{aligned} & \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल} \\ &= (-x^2 + 2) \times (-x^2 - 2) + (-5x + 10) \\ &= x^4 - 2x^2 + 2x^2 - 4 - 5x + 10 \\ &= x^4 - 5x + 6 = \text{भाज्य} \end{aligned}$$

अतः विभाजन एल्गोरिथ्म सत्यापित हो गया।

17. विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 2$ में $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात करें।

हल. दिया गया है $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 2$

दिए गए बहुपद मानक रूप में है। अब हम दिए गए बहुपदों $p(x)$ और $g(x)$ पर विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करते हैं —

$$\begin{array}{r} x - 3 \overline{) x^3 - 3x^2 + 5x - 3} \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ -x^2 + 7x - 3 \\ \underline{-(x^2 - 2)} \\ -3x^2 + 7x^2 - 3 \\ \underline{-(3x^2 - 6)} \\ 7x - 9 \end{array}$$

हम यहाँ रुक जाते हैं, क्योंकि शेषफल $(7x - 9)$ की घात 1, भाजक $x^2 - 2$ की घात 2 से कम है।

इसलिए भाग की क्रिया करके शेषफल $7x - 9$ तथा भागफल $x - 3$ प्राप्त होता है।

अब,

$$\begin{aligned} & \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल} \\ &= (x^2 - 2) \times (x - 3) + (7x - 9) \\ &= x^3 - 2x - 3x^2 + 6 + 7x - 9 \end{aligned}$$

$$= x^3 - 3x^2 + 5x - 3 = \text{भाज्य}$$

अतः विभाजन एल्गोरिथ्म सत्यापित हो गया।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

18. यदि $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर, भागफल और शेषफल क्रमशः $x - 2$ और $-2x + 4$ है तो $g(x)$ ज्ञात करें।

हल. $p(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$, $q(x) = x - 2$ और $r(x) = -2x + 4$ बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म से,

$$\begin{aligned} p(x) &= g(x) \times q(x) + r(x) \\ \Rightarrow x^3 - 3x^2 + x + 2 &= g(x) \times (x - 2) + (-2x + 4) \\ \Rightarrow g(x) \times (x - 2) &= x^3 - 3x^2 + x + 2 + 2x - 4 \\ \Rightarrow g(x) \times (x - 2) &= x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \\ \Rightarrow g(x) &= \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}{(x - 2)} \end{aligned}$$

अब हम $x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ और $x - 2$ पर विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करते हैं।

$$\begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ x - 2 \overline{) x^3 - 3x^2 + 3x - 2} \\ \underline{-(+) x^3 - 2x^2} \\ -x^2 + 3x - 2 \\ \underline{-(+) x^2 + 2x} \\ x - 2 \\ \underline{-(+) x - 2} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{अतः } g(x) = x^2 - x + 1$$

19. $6x^2 - 3 - 7x$ द्विघात बहुपद के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंधों की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल. $6x^2 - 3 - 7x$

$$\text{माना } p(x) = 6x^2 - 3 - 7x, \text{ तब } p(x) = 6x^2 - 7x - 3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(x) &= 6x^2 - 7x - 3 \\ &= 6x^2 - (9 - 2)x - 3 \\ &= 6x^2 - 9x + 2x - 3 \\ &= 3x(2x - 3) + 1(2x - 3) \\ &= (2x - 3)(3x + 1) \end{aligned}$$

$p(x)$ के शून्यकों के लिए

$$\begin{aligned} (2x - 3)(3x + 1) &= 0 \\ \Rightarrow 2x - 3 = 0 \text{ या } 3x + 1 = 0 \\ \Rightarrow 2x = 3 \text{ या } 3x = -1 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ या } x = -\frac{1}{3} \\ \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ या } x = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

अतः $p(x)$ के शून्यक $\frac{3}{2}$ और $-\frac{1}{3}$ है।

सत्यापन,

$$\begin{aligned} \text{इसके शून्यकों का योग} &= \frac{3}{2} + \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{3 \times 3 - 1 \times 2}{6} \\ &= \frac{9 - 2}{6} = \frac{7}{6} = \frac{-(-7)}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{-x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \left(\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-3}{6}$$

$$= \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए :

- रैखिक समीकरण युग्म $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ में यदि $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ हो, तो निम्न में से सही कथन चुनें:
 - अद्वितीय हल होगा
 - अनेक हल होगा
 - कोई हल नहीं होगा
 - दो हल होगा
- यदि रेखाएँ $3x + 2ky = 2$ और $2x + 5y + 1 = 0$ समांतर हैं, तो k का मान क्या होगा?
 - 11/4
 - 11/4
 - 15/4
 - 15/4
- k के किस मान के लिए रेखा युग्म $8x + 5y = 9$ तथा $kx + 10y = 15$ असंगत हैं ?
 - 16
 - 16
 - 15
 - 9
- समीकरण युग्म $2x + y = 4$ और $x + 3y = 15$ का हल होगा:
 - एक हल
 - दो हल
 - अनेक हल
 - कोई हल नहीं
- समीकरण $x + y = 4$ और $x - y = 2$ के द्वारा निरूपित रेखाओं के लिए निम्न में से सही कथन चुनें :
 - संपाती है
 - समांतर है
 - प्रतिच्छेदी है
 - इनमें से कोई नहीं
- यदि $x=2$ और $y=3$ समीकरण $2x + 3y = k$ का एक हल है तो k का मान निम्न में से चुनें :
 - 25
 - 13
 - 15
 - 20
- समीकरण युग्म $x + 3y + 9 = 0$ तथा $2x + 5y + 7 = 0$ का :
 - अद्वितीय हल होगा
 - अनेक हल होगा
 - कोई हल नहीं होगा
 - दो हल होगा
- समीकरण युग्म $y=7$ और $y=-9$ का हल है:
 - एक
 - दो
 - अनंत
 - कोई हल नहीं
- समीकरण $6x - 2y + 9 = 0$ और $3x - y + 12 = 0$ के द्वारा निरूपित रेखाएँ :
 - संपाती
 - समांतर है
 - प्रतिच्छेदी हैं
 - लम्बवत हैं

- यदि दो चरों में रैखिक समीकरण युग्म का ग्राफ एक दूसरे को एक बिंदु पर प्रतिच्छेद करती है, तब समीकरण युग्म होगा :
 - संगत
 - असंगत
 - आश्रित
 - इनमें से कोई नहीं

हल (Solution)

- 1 (b), 2 (c), 3 (b), 4 (a), 5 (c), 6 (b), 7(a), 8 (d), 9 (b), 10 (a)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

- P के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए समीकरण युग्म $px + 3y = 7$ तथा $2x - y = 6$ का एक अद्वितीय हल है।

हल दिया हुआ समीकरण निकाय है:

$$\begin{aligned} px + 3y &= 7 & \Rightarrow & px + 3y - 7 = 0 \\ 2x - y &= 6 & \Rightarrow & 2x - y - 6 = 0 \end{aligned}$$

यहाँ,

$$a_1 = p, b_1 = 3, c_1 = -7, a_2 = 2, b_2 = -1, c_2 = -6$$

अद्वितीय हल के लिए

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{2} \neq \frac{3}{-1}$$

$$\therefore p \neq -6$$

- 2 kg सेब और 1 kg अंगूर का मूल्य किसी दिन ₹160 था। एक महीने बाद 4 kg सेब और 2 kg अंगूर का मूल्य ₹300 हो जाता है। इस स्थिति को बीजगणितीय रूप में व्यक्त कीजिए।

हल माना 1 kg सेब का मूल्य x रुपया तथा 1 kg अंगूर का मूल्य y रुपया है। तब बीजगणितीय रूप निम्न समीकरणों द्वारा देय है:

$$2x + y = 160$$

$$\text{और } 4x + 2y = 300$$

$$\therefore 2x + y = 150$$

- रैखिक समीकरण युग्म $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$ संगत है या असंगत।

हल दिया गया रैखिक समीकरण युग्म है

$$2x + y - 6 = 0, 4x - 2y - 4 = 0$$

यहाँ,

$$a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = -6, a_2 = 4, b_2 = -2, c_2 = -4$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

यहाँ हम पाते हैं

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

अतः दिए हुए रैखिक समीकरण युग्म द्वारा निरूपित रेखाएँ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं अर्थात् दिए हुए रैखिक समीकरण युग्म का एक अद्वितीय हल है।

अतः दिया हुआ समीकरण युग्म संगत है।

14. आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए:

$$5x - y - 7 = 0, \quad x - y + 1 = 0$$

हल दिया है $5x - y - 7 = 0$ (1)

$$x - y + 1 = 0$$
 (2)

समीकरण (1) के लिए $5x - y - 7 = 0$
 $\Rightarrow y = 5x - 7$

हलों की सारणी

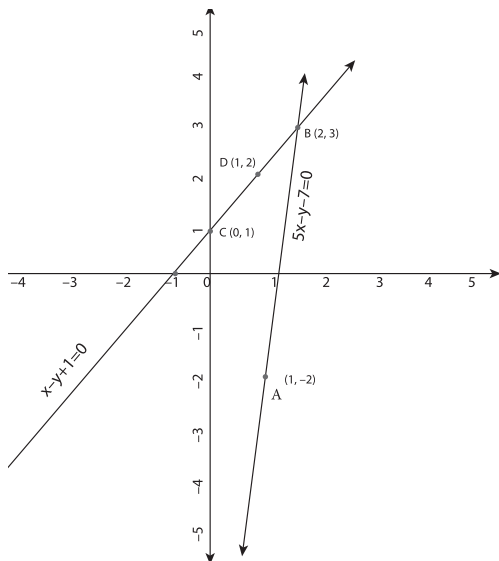
x	1	2
y	-2	3

समीकरण (2) के लिए $x - y + 1 = 0$
 $\Rightarrow y = x + 1$

हलों की सारणी

x	0	1
y	1	2

एक ग्राफ पेपर पर हम बिन्दुओं A(1, -2) और B(2, 3) को रेखा AB प्राप्त करने के लिए आलेखित करते हैं और बिन्दुओं C(0, 1) और D(1, 2) को रेखा CD प्राप्त करने के लिए आलेखित करते हैं।



ग्राफ से हम देखते हैं कि रेखाएँ AB और CD बिन्दु B(2, 3) पर प्रतिच्छेद करती हैं।

अतः $x = 2, y = 3$ अभीष्ट हल है।

15. P के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्नलिखित समीकरण निकाय का एक अद्वितीय हल हो :

$$px + 2y = 5, \quad 3x + y = 1$$

हल: दिया हुआ समीकरण निकाय है:

$$px + 2y = 5$$

$$3x + y = 1$$

$$\Rightarrow px + 2y - 5 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$3x + y - 1 = 0 \dots\dots\dots(2)$$

यहाँ,

$$a_1 = p, b_1 = 2, c_1 = -5$$

$$a_2 = 3, b_2 = 1, c_2 = -1$$

अद्वितीय हल के लिए

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$$\Rightarrow \frac{p}{3} \neq \frac{2}{1}$$

$$\therefore p \neq 6$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

16. आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए।

अथवा,

दिए गए रैखिक समीकरणों को ग्राफीय विधि से हल कीजिए।

$$x + 3y = 6, \quad 2x - 3y = 12$$

हल. दिया हुआ समीकरण युग्म है : $x + 3y = 6,$
 $2x - 3y = 12$

समीकरण $x + 3y = 6$ के लिए

$$\therefore x + 3y = 6$$

$$\therefore y = \frac{6-x}{3}$$

हलों की सारणी

x	0	3
y	2	1

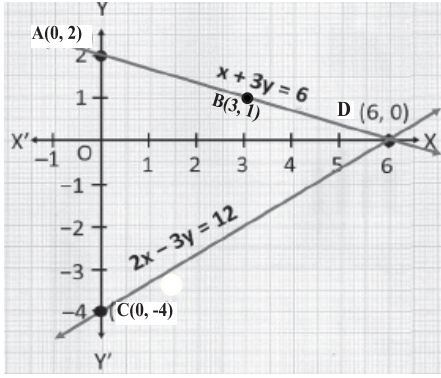
समीकरण $2x - 3y = 12$ के लिए

$$\therefore 2x - 3y = 12$$

$$\therefore y = \frac{12-2x}{-3} \Rightarrow y = \frac{2x-12}{3}$$

हलों की सारणी

x	0	6
y	-4	0



हम देखते हैं कि रेखाएँ AB और CD बिन्दु (6, 0) पर प्रतिच्छेद करती हैं।

अतः $x=6, y=0$ अभीष्ट हल है।

17. रैखिक समीकरण युग्म $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$,

$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$ को प्रतिस्थापन विधि से हल करें।

हल. $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$ दिया हुआ रैखिक समीकरण युग्म है:

$$\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6} \quad \dots\dots\dots(2)$$

समीकरण (1) से $\frac{3x}{2} = \frac{5y}{3} - 2$

$$\Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{5y-6}{3} \Rightarrow \frac{2(5y-6)}{9}$$

$$\therefore x = \frac{2(5y-6)}{9} \quad \dots\dots\dots(3)$$

x के इस मान को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{1}{3} \left\{ \frac{2(5y-6)}{9} \right\} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{4(5y-6) + 27y}{54} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{20y - 24 + 27y}{9} = \frac{13}{1} \Rightarrow 47y - 24 = 117$$

$$\Rightarrow 47y = 24 + 117 \Rightarrow 47y = 141 \Rightarrow y = \frac{141}{47} = 3$$

y के मान को समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$$x = \frac{2(5 \times 3 - 6)}{9} = 2$$

अतः हल $x=2$ तथा $y=3$ है

सत्यापन— $x=2, y=3$ को प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि दोनों समीकरण (1) और (2) संतुष्ट हो जाते हैं, जैसा कि नीचे दिखाया गया है:

$$\frac{3x}{2} + \frac{5y}{3} = \frac{3(2)}{2} - \frac{5(3)}{3} = 3 - 5 = -2$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}$$

अतः प्राप्त हल सही है।

18. दो अंकों वाली एक संख्या के अंको का योग 8 है। अंको को पलटने पर प्राप्त होने वाली संख्या दी गई संख्या से 36 अधिक है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल. माना दो अंको वाली संख्या का इकाई अंक x तथा दहाई का अंक y है।

तब प्रश्नानुसार, $x+y=8$ (1)

तथा संख्या $= 10y+x$

अंको को पलटने पर प्राप्त होने वाली संख्या $= 10x+y$

पुनः प्रश्नानुसार

$$10x+y = (10y+x) + 36 \Rightarrow 10x-x+y-10y=36$$

$$\Rightarrow 9x-9y=36$$

$$\Rightarrow x-y=4 \quad \dots\dots\dots(2) \quad [9 \text{ से भाग देने पर}]$$

समीकरण (1) और समीकरण (2) को जोड़ने पर

$$2x=12 \Rightarrow x = \frac{12}{2} = 6$$

समीकरण (1) में समीकरण (2) को घटाने पर,

$$2y=4 \Rightarrow y = \frac{4}{2} = 2$$

अतः अभीष्ट संख्या $10y+x=10 \times 2+6=26$ है।

सत्यापन $6+2=8$

$$\Rightarrow 62=26+36$$

अतः प्राप्त हल सही है।

19. हल करें $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$, $\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2$

हल दिया हुआ समीकरण निकाय है:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

माना,

$$\frac{1}{x} = a \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{1}{y} = b \quad \dots\dots\dots(4)$$

x और y का मान समीकरण (3) और (4) से समीकरण (1) और (2) में रखने पर हम पाते हैं:

$$2a+3b=13 \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$5a-4b=-2 \quad \dots\dots\dots(6)$$

समीकरण (5) में 4 से और समीकरण (6) में 3 से गुणा करने पर हम पाते हैं:

$$8a+12b=52 \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$15a-12b=-6 \quad \dots\dots\dots(8)$$

समीकरण (7) और समीकरण (8) को जोड़ने पर हम पाते हैं:

$$23a = 46$$

$$a = \frac{46}{23} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 2 \quad [\text{समीकरण (3) से}]$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

$a = 2$ को समीकरण (5) में रखने पर हम पाते हैं:

$$2(2) + 3b = 13$$

$$\Rightarrow 4 + 3b = 13$$

$$3b = 9 \Rightarrow b = \frac{9}{3} = 3$$

$$\Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = 3 \quad [\text{समीकरण (4) से}]$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}$$

अतः अभीष्ट हल है : $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$

सत्यापन – समीकरण (1) और समीकरण (2) में $x = \frac{1}{2}$ और $y = \frac{1}{3}$ प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि दोनों समीकरण संतुष्ट हो जाते हैं जैसा कि नीचे दिखाया गया है:

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{3}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 4 + 9 = 13$$

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{y} = \frac{5}{\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{4}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 10 - 12 = -2$$

20. किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में से प्रत्येक में यदि 1 जोड़ दें तो वह $\frac{4}{5}$ बन जाती है परन्तु प्रत्येक में से 5 घटा दें, तो वह $\frac{1}{2}$ हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल माना भिन्न $\frac{x}{y}$ है

तब प्रश्नानुसार,

$$\frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5}$$

$$5(x+1) = 4(y+1)$$

$$5x + 5 \times 1 = 4y + 4 \times 1$$

$$5x - 4y = 4 - 5 = -1$$

$$5x - 4y = -1 \quad (1)$$

और $\frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2}$

$$2(x-5) = 1(y-5)$$

$$2x - 10 = y - 5$$

$$2x - y = -5 + 10$$

$$2x - y = +5 \quad (2)$$

समीकरण (2) से

$$y = 2x - 5$$

y का यह मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$5x - 4(2x - 5) = -1$$

$$\Rightarrow 5x - 8x + 20 = -1$$

$$\Rightarrow -3x = -1 - 20$$

$$\Rightarrow -3x = -21$$

$$\Rightarrow x = \frac{-21}{-3} = 7$$

समीकरण (2) में $x = 7$ रखने पर,

$$2(7) - y = 5$$

$$\Rightarrow 14 - y = 5$$

$$\Rightarrow -y = 5 - 14 = -9$$

$$\therefore y = 9$$

अतः अभीष्ट भिन्न $\frac{7}{9}$ है।

सत्यापन,

$$\frac{7+1}{9+1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{7-5}{9-5} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

अतः प्राप्त हल सही है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए :

1. निम्नलिखित में से कौन सा द्विघात समीकरण है?

- (a) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$
 (b) $x^2 + 3x + 1 = (x + 1)(x + 2)$
 (c) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$
 (d) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

2. द्विघात समीकरण $3x^2 - 2x - 1 = 0$ एक हल है :-

- (a) 1 (b) 2
 (c) 3 (d) 4

3. विविक्तकर D निम्न में से किसके बराबर होता है:

- (a) $b^2 - 4ac$ (b) $b^2 + 4ac$
 (c) $b^2 - ac$ (d) $b^2 + ac$

4. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दो भिन्न वास्तविक मूल होंगे यदि :

- (a) $b^2 - 4ac < 0$ (b) $b^2 - 4ac = 0$
 (c) $b^2 - ac > 0$ (d) निम्न में से कोई नहीं

5. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का विविक्तकर, $b^2 - 4ac = 0$ हो, तो समीकरण के मूल होंगे :

- (a) वास्तविक तथा असमान
 (b) वास्तविक तथा समान
 (c) वास्तविक नहीं,
 (d) इनमें से कोई नहीं

6. द्विघात समीकरण $x^2 + 2x - 8 = 0$ मूल हैं :

- (a) 4, 2 (b) -4, 2
 (c) 4, -2 (d) -4, -2

7. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ में निम्न में से किसका मान 0 नहीं होना चाहिए ?

- (a) b (b) c
 (c) a (d) इनमें से कोई नहीं

8. $x(2x + 3) = x^2 - 1$ किस प्रकार का समीकरण है?

- (a) रैखिक (b) द्विघात
 (c) त्रिघात (d) इनमें से कोई नहीं

9. यदि द्विघात समीकरण $x^2 - 4x + k = 0$ का मूल समान हो, तो k का मान होगा:

- (a) 3 (b) 3
 (c) 4 (d) इनमें से कोई नहीं

10. द्विघात समीकरण $x^2 - 5x + 6 = 0$ मूल होंगे :

- (a) 2, 3 (b) 2, 2
 (c) 3, 0 (d) इनमें से कोई नहीं

हल (Solution)

- 1 (c), 2 (a), 3 (a), 4 (c), 5 (b), 6 (b), 7 (c), 8 (b), 9 (c), 10 (a)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

11. जाँच कीजिए कि $x(2x + 3)$ द्विघात समीकरण है या नहीं।

हल. दिया गया समीकरण है:

$$\begin{aligned} x(2x + 3) &= x^2 + 1 \\ \Rightarrow 2x^2 + 3x &= x^2 + 1 \\ \Rightarrow 2x^2 - x^2 + 3x - 1 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + 3x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का है।

अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

12. जाँच कीजिए कि x का दिया गया मान समीकरण का हल है या नहीं।

$$3x^2 - 2x - 1 = 0, x = 1$$

हल. प्रदत्त समीकरण है:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ \text{L.H.S. } 3x^2 - 2x - 1; \quad \text{R.H.S.} &= 0 \\ x = 1 \text{ के लिए} \\ \text{L.H.S.} &= 3(1)^2 - 2(1) - 1 \\ &= 3 - 2 - 1 \\ &= 3 - 3 \\ &= 0 \\ &= \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

अतः $x = 1$ द्विघात समीकरण $3x^2 - 2x - 1 = 0$ का हल है।

13. द्विघाती समीकरण $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल. दिया गया द्विघात समीकरण है:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2x + \frac{1}{3} &= 0 \\ \text{यहाँ } a = 3, b = -2, c &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{विविक्तकर (D)} &= b^2 - 4ac \\ &= (-2)^2 - 4(3)\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$= 4 - 4 = 0$$

अतः दिए गए द्विघात समीकरण के दो बराबर वास्तविक मूल हैं।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (5 अंक)

14. निम्न द्विघात समीकरण के मूल, यदि उनका अस्तित्व हो, तो द्विघाती सूत्र का उपयोग करके ज्ञात कीजिए।

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

हल. दिया गया समीकरण है :

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

यहां $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$

$$\begin{aligned} \therefore \text{विविक्तकर (D)} &= b^2 - 4ac \\ &= (-5)^2 - 4(3)(2) \\ &= 25 - 24 \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

अतः दिए गए द्विघात समीकरण के दो भिन्न मूल हैं।

द्विघात सूत्र से,

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \therefore x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} \\ \therefore x &= \frac{5 \pm 1}{6} \\ \therefore x &= \frac{5+1}{6} \text{ या } \frac{5-1}{6} \\ \therefore x &= \frac{6}{6} \text{ या } \frac{4}{6} \\ \therefore x &= 1, \frac{2}{3} \end{aligned}$$

अतः दिए गए द्विघात समीकरण के दो भिन्न वास्तविक मूल 1 और $\frac{2}{3}$ हैं।

15. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योग 27 हो और गुणनफल 182 हो।

हल. माना एक संख्या x है तथा दूसरी संख्या $= (27 - x)$
[\therefore दोनों संख्याओं का योग 27 है।]

$$\therefore \text{संख्याओं का गुणनफल} = x(27 - x)$$

प्रश्नानुसार,

$$\begin{aligned} \therefore x(27 - x) &= 182 \Rightarrow 27x - x^2 = 182 \\ x^2 - 27x + 182 &= 0 \Rightarrow x^2 - 13x - 14x + 182 = 0 \\ \Rightarrow x(x - 13) - 14(x - 13) &= 0 \Rightarrow (x - 13)(x - 14) = 0 \\ \Rightarrow x - 13 = 0 \text{ या } x - 14 = 0 &\Rightarrow x = 13 \text{ या } x = 14 \\ \Rightarrow x &= 13, 14 \\ \Rightarrow 27 - x &= 14, 13 \end{aligned}$$

अतः दो संख्याएँ 13 और 14 हैं। Ans.

16. दो क्रमागत घनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 365 हो।

हल. माना दो क्रमागत घनात्मक पूर्णांक x और $x+1$ हैं।
[\therefore दो क्रमागत घनात्मक पूर्णांक में 1 का अंतर होता है।]

$$\text{तब उनके वर्गों का योग} = x^2 + (x+1)^2$$

प्रश्नानुसार,

$$\begin{aligned} x^2 + (x+1)^2 &= 365 \\ \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 &= 365 \\ \Rightarrow 2x^2 + 2x - 364 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + x - 182 &= 0 \text{ [2 से भाग देने पर]} \\ \Rightarrow x^2 + (14-13)x - 182 &= 0 \\ \Rightarrow x^2 + 14x - 13x - 182 &= 0 \\ \Rightarrow x(x+14) - 13(x+14) &= 0 \\ \Rightarrow (x+14)(x-13) &= 0 \\ \Rightarrow x+14 = 0 \text{ या } x-13 = 0 \\ \Rightarrow x = -14 \text{ या } x = 13 \\ \Rightarrow x = 14, 13 \end{aligned}$$

$\therefore x$ एक घनात्मक पूर्णांक है। $\therefore x = -14$ अग्राह्य है।

$$\therefore x = 13 \quad \Rightarrow x+1 = 13+1 = 14$$

अतः दो क्रमागत पूर्णांक 13 और 14 हैं।

17. 3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु (वर्षों में) का व्युत्क्रम और अब से 5 वर्ष पश्चात् आयु के व्युत्क्रम का योग $\frac{1}{3}$ है। उसकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल. माना रहमान की वर्तमान आयु x वर्ष है।

$$\text{तब 3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु} = (x-3) \text{ वर्ष और}$$

$$\text{अब से 5 वर्ष पश्चात् रहमान की आयु} = (x+5) \text{ वर्ष}$$

प्रश्नानुसार,

$$3 \text{ वर्ष पूर्व रहमान की आयु का व्युत्क्रम} + 5 \text{ वर्ष पश्चात् आयु का व्युत्क्रम} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+5) + (x-3)}{(x-3)(x+5)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{(x-3)(x+5)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+5) = 3(2x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 3x - 15 = 6x + 6$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 - 6x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$$

जो x में एक द्विघात समीकरण है।

यहाँ $a = 1, b = -4, c = -21$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-21)$$

$$= 16 + 84 = 100$$

$$\therefore D > 0$$

\therefore द्विघात समीकरण के दो भिन्न वास्तविक मूल होंगे।

द्विघाती सूत्र से,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-21)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 10}{2} = \frac{4 + 10}{2}, \frac{4 - 10}{2} = 7, -3$$

$\therefore x$ आयु है और आयु ऋणात्मक नहीं हो सकती।

$\therefore x = -3$ अग्राह्य है।

$\therefore x = 7$ वर्ष

अतः रहमान की वर्तमान आयु 7 वर्ष है।

सत्यापन—

3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु $= (7 - 3)$ वर्ष $= 4$ वर्ष अब से 5 वर्ष पश्चात् रहमान की आयु $= (7 + 5)$ वर्ष $= 12$ वर्ष

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{3 + 1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

अतः प्राप्त हल सही है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए :

- A.P : 3, 1, -1, -3 के लिए क्रमशः प्रथम पद a और सार्व अंतर d क्या होगा ?
 (a) 3, 2 (b) 3, -2
 (c) 1, 3 (d) -1, -3
- A.P : 3, 7, 11..... का कौन सा पद 31 है ?
 (a) 10 वाँ (b) 7 वाँ
 (c) 8 वाँ (d) 11 वाँ
- A.P : 7, 13, 19, 205 में कितने पद है ?
 (a) 35 (b) 34
 (c) 32 (d) 33
- A.P : 24, 21, 18का सार्व अंतर है :
 (a) 3 (b) -4
 (c) 5 (d) -3
- यदि A.P का n वाँ पद $a_n = 4n + 3$ है तो A.P का पाँचवाँ पद का मान निम्न में से चुनें :
 (a) 19 (b) 22
 (c) 23 (d) 27
- AP: 2, 7, 12के 10 पदों का योग क्या होगा ?
 (a) 230 (b) 245
 (c) 247 (d) 260
- प्रथम पद a एवं सार्व अंतर d वाले A.P का n वाँ पद निम्न में से चुनें:
 (a) $a_n = a + d$ (b) $a_n = a + nd$
 (c) $a_n = a + 3d$ (d) $a_n = a + (n-1)d$
- A.P : 10, 7, 4 का 30वाँ पद होगा :
 (a) 97 (b) 77
 (c) -77 (d) -87
- A.P 3, 8, 13का कौन सा पद 78 है:
 (a) 15 वाँ (b) 16 वाँ
 (c) 13 वाँ (d) 14 वाँ
- किसी A.P के प्रथम n पदों का योग का सूत्र है:
 (a) $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
 (b) $S_n = \frac{n}{2}[a + d]$
 (c) $S_n = \frac{n}{2}[2a + d]$
 (d) $S_n = \frac{n}{2}[a + (n-1)d]$

हल (Solution)

- 1 (b), 2 (c), 3 (b), 4 (d), 5 (c), 6 (b), 7(d), 8 (c), 9 (b),
 10 (a)

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

- समान्तर श्रेणी 51, 59, 67, 75, का सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए और उसके अगले दो पद लिखिए।
 हल: समान्तर श्रेणी 51, 59, 67, 75, का पदान्तर = $59 - 51 = 8$
 अगला दो पद,
 $a_5 = 75 + 8 = 83$
 $a_6 = 83 + 8 = 91$
 अतः समान्तर श्रेणी 51, 59, 67, 75, का अगला दो पद 83 और 91 है।
- A.P : 4, 10, 16, 22,..... के लिए प्रथम पद तथा सार्व अन्तर लिखें।
 हल: दिया गया A.P : 4, 10, 16, 22,..... के लिए
 प्रथम पद(a) = 4
 सार्व अन्तर(d) = $10 - 4 = 6$
- उस A.P. का 12वाँ पद ज्ञात कीजिए जिसका प्रथम पद 9 और सार्व अन्तर 10 है।
 हल: प्रश्नानुसार $a = 9, d = 10$
 \therefore 12वाँ पद = a_{12}
 $\therefore a_{12} = a + (12-1)d$ [$\because a_n = a + (n-1)d$]
 $\therefore a_{12} = 9 + 11 \times 10$
 $\therefore a_{12} = 9 + 110$
 $\therefore a_{12} = 119$
 अतः 12वाँ पद 119 है।

लघु उत्तरीय प्रश्न

- $a = 5, d = 3$ और $a_n = 50$ दिया है तो n ज्ञात करें और S_n ज्ञात करें।
 हल. दिया है $a = 5, d = 3$ और $a_n = 50$
 हम जानते हैं, कि
 $a_n = a + (n-1)d$
 $\Rightarrow 50 = 5 + (n-1)3$

$$\Rightarrow (n-1)3 = 50 - 5$$

$$\Rightarrow (n-1) = \frac{45}{3} = 15$$

$$\Rightarrow n-1 = 15$$

$$\Rightarrow n = 15+1$$

$$\therefore n = 16$$

हम जानते हैं कि,

$$S_n = \frac{n}{2} [2a+(n-1)d]$$

$$= \frac{16}{2} [2(5)+(16-1)(3)]$$

$$= 8 (10+45)$$

$$= 8 \times (55)$$

$$= 440$$

$$\therefore S_n = 440$$

15. $a=3, n=8$ और $s=192$ दिया गया है। d ज्ञात करें।

हल: दिया गया है $a=3, n=8$ और $s=192$

हम जानते हैं कि,

$$S_n = \frac{n}{2} [2a+(n-1)d]$$

$$\Rightarrow 192 = \frac{8}{2} [2(3)+(8-1)d]$$

$$\Rightarrow 192 = 4[6+7(d)]$$

$$\Rightarrow \frac{192}{4} = 6+7d$$

$$\Rightarrow 48 = 6+7d$$

$$\Rightarrow 48-6 = +7d$$

$$\Rightarrow \frac{42}{7} = d$$

$$\therefore d = 6$$

16. समान्तर श्रेणी 21, 42, 63, 84,..... का कौन सा पद 420 है।

हल: प्रदत्त समान्तर श्रेणी है:

$$21, 42, 63, 84, \dots$$

यहाँ $a=21, \quad d=42-21=21$

माना इस समान्तर श्रेणी का n वाँ पद 420 है

तब $a_n = 420$

$$\Rightarrow a + (n-1)d = 420$$

$$\Rightarrow 21 + (n-1)21 = 420$$

$$\Rightarrow (n-1)21 = 420 - 21$$

$$\Rightarrow (n-1)21 = 399$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{399}{21}$$

$$\Rightarrow n = 19$$

$$\Rightarrow n = 19+1$$

$$\therefore n = 20$$

अतः प्रदत्त समान्तर श्रेणी का 20वाँ पद 420 है।

17. किसी A.P. का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 और योग 400 है। पदों की संख्या और सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है

$$\text{प्रथम पद (a)} = 5$$

$$\text{अंतिम पद (l)} = 45$$

$$\text{योग (S}_n) = 400$$

माना पदों की संख्या n और सार्व अन्तर d है।

हम जानते हैं कि,

$$S_n = \frac{n}{2} (a+l)$$

$$\Rightarrow 400 = \frac{n}{2} (5+45) = \frac{n}{2} \times 50$$

$$\Rightarrow 400 = 25n$$

$$\Rightarrow \frac{400}{25} = n$$

$$\therefore n = \frac{400}{25} = 16$$

अतः पदों की संख्या 16 है।

हम जानते हैं कि

$$l = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow 45 = 5 + (16-1)d$$

$$\Rightarrow 45 = 5 + 15d$$

$$\Rightarrow 15d = 45 - 5$$

$$\Rightarrow d = \frac{40}{15}$$

$$\therefore d = \frac{8}{3}$$

अतः सार्व अन्तर $\frac{8}{3}$ है।

18. उस A.P. के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसमें $d=7$ और 22वाँ पद 149 है।

हल. प्रश्नानुसार $d=7$

और $a_{22} = 149$

माना A.P. का प्रथम पद a है

हम जानते हैं कि

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow a_{22} = a + (22-1)d$$

$$\Rightarrow a_{22} = a + 21d$$

$$\Rightarrow 149 = a + 21 \times 7$$

$$\Rightarrow 149 = a + 147$$

$$\Rightarrow 149 - 147 = 9$$

$$\Rightarrow 2 = 9$$

$$\therefore a = 2$$

हम जानते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{22} &= \frac{22}{2} [2(2) + (22-1)(7)] \\ \Rightarrow S_{22} &= 11 [4 + 21(7)] \\ \Rightarrow S_{22} &= 11 [4 + 147] \\ \Rightarrow S_{22} &= 11 \times 151 \\ \therefore S_{22} &= 1661 \end{aligned}$$

अतः वांछित योग 1661 है।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (5 अंक)

19. उस A.P. के प्रथम 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसके दूसरे ओर तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 है।

हल. माना A.P. का प्रथम पद a और सार्व अन्तर d है। तब, प्रश्नानुसार दूसरा पद = 14

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_2 &= 14 \\ \Rightarrow a + (2-1)d &= 14 \quad [\because a_n = a + (n-1)d] \\ \Rightarrow a + d &= 14 \quad \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

और तीसरा पद = 18 (प्रश्नानुसार)

$$\begin{aligned} a_3 &= 18 \\ \Rightarrow a + (3-1)d &= 18 \quad [\because a_n = a + (n-1)d] \\ \Rightarrow a + 2d &= 18 \quad \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

समीकरण (1) और समीकरण (2) को हल करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$a = 10, d = 4$$

अतः A.P. के प्रथम 51 पदों का योग = S_{51}

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ \Rightarrow S_{51} &= \frac{51}{2} [2a + (51-1)d] \\ \Rightarrow S_{51} &= \frac{51}{2} [2a + 50d] = (a + 25d) \\ \Rightarrow S_{51} &= 51(10 + 25 \times 4) = 51(10 + 100) \\ \therefore S_{51} &= 51(110) = 5610 \end{aligned}$$

अतः वांछित योग 5610 है।

20. यदि किसी A.P. के प्रथम n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो उसका प्रथम पद अर्थात् क्या S_1 क्या है? प्रथम दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है? इसी प्रकार तीसरे, 10वें और n वें पद ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है :

$$\text{A.P. के प्रथम } n \text{ पदों का योग} = 4n - n^2$$

$$S_n = 4n - n^2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

समीकरण (1) में $n = 1$ रखने पर हम पाते हैं:

$$\begin{aligned} S_1 &= 4(1) - (1)^2 \\ \Rightarrow S_1 &= 4 - 1 \\ \Rightarrow S_1 &= 3 \\ \therefore a_1 &= 3 \end{aligned}$$

अतः प्रथम पद 3 है।

समीकरण (1) में $n = 2$ रखने पर हम पाते हैं:

$$\begin{aligned} S_2 &= 4(2) - (2)^2 \\ \Rightarrow S_2 &= 4(2) - (2)^2 \\ \Rightarrow S_2 &= 8 - 4 \\ \therefore S_2 &= 4 \end{aligned}$$

अतः प्रथम दो पदों का योग 4 है।

$$\therefore \text{दूसरा पद } a_2 = S_2 - S_1 = 4 - 3 = 1$$

अतः दूसरा पद 1 है।

समीकरण (1) में $n = 3$ रखने पर हम पाते हैं:

$$\begin{aligned} S_3 &= 4(3) - (3)^2 \\ \Rightarrow S_3 &= 12 - 9 \\ \therefore S_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{तीसरा पद } (a_3) = S_3 - S_2 = 3 - 4 = -1$$

अतः तीसरा पद -1 है।

समीकरण (1) में क्रमशः $n = 9, 10$ रखने पर हम पाते हैं:

$$\begin{aligned} S_9 &= 4(9) - 9^2 \\ \Rightarrow S_9 &= 36 - 81 \\ \therefore S_9 &= -45 \\ \text{और } S_{10} &= 4(10) - (10)^2 \\ \therefore S_{10} &= 40 - 100 \\ &= -60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 10\text{वाँ पद } (a_{10}) &= S_{10} - S_9 = -60 - (-45) \\ &= -60 + 45 = -15 \\ \therefore a_{10} &= -15 \end{aligned}$$

पुनः समीकरण (1) में n के स्थान पर $(n-1)$ रखने पर हम पाते हैं:

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= 4(n-1) - (n-1)^2 \\ &= 4n - 4 - (n^2 - 2n + 1) \\ &= 4n - 4 - n^2 - 2n + 1 \\ &= -n^2 + 6n - 5 \\ \therefore n\text{वाँ पद } a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (4n - n^2) - (-n^2 + 6n - 5) \\ &= 4n - n^2 + n^2 - 6n + 5 \\ &= 5 - 2n \end{aligned}$$

अतः n वाँ पद $5 - 2n$ है।

21. यदि किसी AP में, $a = 7$ और $a_{13} = 35$ है, तो d और S_{13} का मान ज्ञात करें।

हल:- दिया है,

$$a = 7 \text{ तथा } a_{13} = 35$$

हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned} a_n &= a + (n-1)d \\ \Rightarrow a_{13} &= a + 12d \\ \Rightarrow 35 &= 7 + 12d \\ \Rightarrow 12d &= 35 - 7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow d = \frac{28}{12}$$

$$\therefore d = \frac{7}{3}$$

हम जानते हैं कि

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2} [2a + (13-1)d]$$

$$\Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2} [2a + 12d]$$

$$\Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2} [2a + 6d]$$

$$\Rightarrow S_{13} = 13 \left(7 + 6 \times \frac{7}{3}\right)$$

$$\Rightarrow S_{13} = 13(7 + 14)$$

$$\Rightarrow S_{13} = 13(21)$$

$$\therefore S_{13} = 273$$

22. तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं?

हल: 7 से विभाज्य 3 अंको वाली संख्याएँ

105, 112, 119, 126, 994

यहाँ

$$a_1 = 105 \quad a_2 = 112$$

$$a_3 = 119 \quad a_4 = 126$$

$$d_1 = a_2 - a_1 = 112 - 105 = 7$$

$$d_2 = a_3 - a_2 = 119 - 112 = 7$$

यहाँ $d_1 = d_2$ है।

अतः दी हुई संख्याओं की सूची एक A.P. है,

जिसका प्रथम पद $a = 105$ और सार्व अन्तर $d = 7$ है।

माना इस A.P. में पदों की संख्या n है।

$$n\text{वाँ पद} = 944$$

$$\therefore a_n = 944$$

$$\Rightarrow a_n + (n-1)d = 944$$

$$\Rightarrow 105 + (n-1)7 = 944$$

$$\Rightarrow (n-1)7 = 944 - 105 = 839$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{839}{7} = 127$$

$$\Rightarrow n = 127 + 1$$

$$\therefore n = 128$$

अतः तीन अंकों वाली 128 संख्याएँ 7 से विभाज्य है।

23. 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

हल 0 और 50 के बीच की विषम संख्याएँ हैं:

1, 3, 5, 7, 49

यहाँ

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 3$$

$$a_3 = 5 \quad a_4 = 7$$

$$d_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$$

$$d_2 = a_3 - a_2 = 5 - 3 = 2$$

यहाँ $d_1 = d_2$ है।

अतः संख्याओं की उपर्युक्त सूची एक A.P. है।

यहाँ $a = 1, d = 2, l = 49$

माना इस A.P. के पदों की संख्या n है।

तब $n\text{वाँ पद} = 49$

$$\Rightarrow a_n = 49$$

$$\Rightarrow l = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow 1 + (n-1)2 = 49$$

$$\Rightarrow (n-1)2 = 49 - 1$$

$$\Rightarrow (n-1)2 = 48$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{48}{2}$$

$$\Rightarrow n = 24 + 1 \Rightarrow n = 25$$

$\therefore 0$ और 50 के बीच की विषम संख्याओं का

योग (S_{25})

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} (a + l)$$

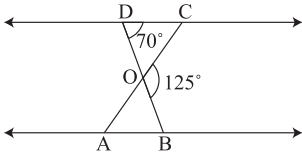
$$S_{25} = \frac{25}{2} (a + l)$$

$$= \frac{25}{2} (1+49) = \frac{25 \times 50}{2} = 25 \times 25 = 625$$

अतः वांछित योग 625 है।

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए:

- सभी..... त्रिभुज समरूप होते हैं:
 - समद्विबाहु
 - समकोण
 - विषमबाहु
 - समबाहु
- यदि एक त्रिभुज के सभी कोण एक अन्य त्रिभुज के संगत कोणों के क्रमशः बराबर हो, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं। समरूपता की इस कसौटी को किस नाम से जाना जाता है?
 - ASA
 - SAS
 - AAA
 - SSS
- समरूप त्रिभुज की संगत भुजाएँ होती है।
 - बराबर
 - समानुपाती
 - समांतर
 - लम्बवत
- दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4:9 के अनुपात में है। इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात है:
 - 2:3
 - 4:9
 - 81:16
 - 16:81
- $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ और $\angle CDO = 70^\circ$ है। $\angle DCO$ का मान कितना होगा?
 
 - 70°
 - 65°
 - 60°
 - 55°
- त्रिभुज ABC में, $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm तथा कोण $B = 90^\circ$ है तो $AC = ?$
 - 5 cm
 - $3\sqrt{2}$ cm
 - $4\sqrt{2}$ cm
 - $5\sqrt{2}$ cm
- सभी वृत्त होते हैं।
 - समरूप
 - सर्वांगसम
 - दोनों
 - इनमें से कोई नहीं
- दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 64 : 121 है। इन त्रिभुजों के संगत शीर्षलंबों का अनुपात होगा :
 - 32:100
 - 8:10
 - 8:11
 - 7:11
- ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य-बिंदु है। त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात है:
 - 2:1
 - 1:2
 - 4:1
 - 1:4
- एक सीढ़ी किसी दीवार पर इस प्रकार टिकी हुई है कि इसका

निचला सिरा दीवार से 2.5 m की दूरी पर है तथा इसका ऊपरी सिरा भूमि से 6 m की ऊँचाई पर बनी एक खिड़की तक पहुँचता है। सीढ़ी की लंबाई कितनी है?

- 8.5 m
- 6.5 m
- 7.5 m.
- 6.5m

- ΔABC में, $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AC = 12$ cm और $BC = 6$ cm हो, तो कोण B है:
 - 120°
 - 60°
 - 90°
 - 45°

- समरूप त्रिभुज के संगत कोण होते हैं।
 - बराबर
 - समानुपाती
 - समांतर
 - असमान

हल (Solution)

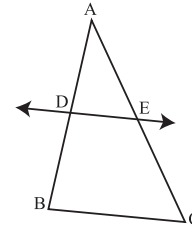
- | | | |
|-------|--------|--------|
| 1. d. | 6. a. | 11. c. |
| 2. c. | 7. a. | 12. a. |
| 3. b. | 8. c. | 13. b. |
| 4. d. | 9. c. | |
| 5. d. | 10. b. | |

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

- भुजाओं की समान संख्या वाले दो बहुभुज समरूप होते हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ.....हों।

Ans:- समानुपाती

- ΔABC में यदि $DE \parallel BC$ हो, तथा $BD = 7.2$ cm, $AE = 1.8$ cm और $EC = 5.4$ cm हो तो AD का मान क्या होगा?



Ans:- दिया गया है $BD = 7.2$ cm, $AE = 1.8$ cm, $EC = 5.4$ cm

$\therefore DE \parallel BC$

\therefore थेल्स प्रमेय से

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

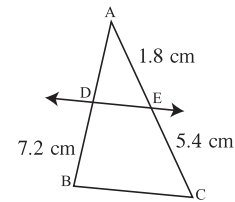
$$\Rightarrow \frac{AD}{7.2} = \frac{1.8}{5.4}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{7.2} = \frac{1}{3}$$

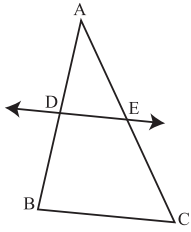
$$\Rightarrow 3 \times AD = 7.2$$

$$\Rightarrow AD = \frac{7.2}{3} = 2.4$$

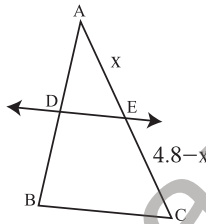
$\therefore AD = 2.4$ cm Ans.



15. ΔABC में यदि $DE \parallel BC$ हो तथा $AD/DB = \frac{3}{5}$ और $AC = 4.8$ cm हो तो AE ज्ञात कीजिए।

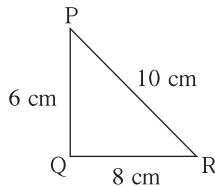


Ans:- दिया गया है $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{5}$ और $AC = 4.8$ cm
 $\therefore DE \parallel BC$
 \therefore थेल्स प्रमेय से
 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$
 $\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{x}{4.8-x}$
 $\Rightarrow 5x = 3(4.8-x)$
 $\Rightarrow 5x = 3 \times 4.8 - 3x$
 $\Rightarrow 5x + 3x = 14.4$
 $\Rightarrow 8x = 14.4$
 $\Rightarrow x = \frac{14.4}{8} = 1.8$
 $\therefore x = 1.8$ cm Ans.

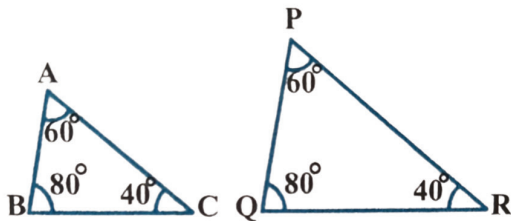


16. ΔPQR में $PQ = 6$ cm, $QR = 8$ cm तथा $PR = 10$ cm है तो $\angle Q$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans:- $PQ^2 + QR^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$
 $PR^2 = 10^2 = 100$
 $\therefore PQ^2 + QR^2 = PR^2$
 पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से,
 $\angle PQR = 90^\circ$ Ans.

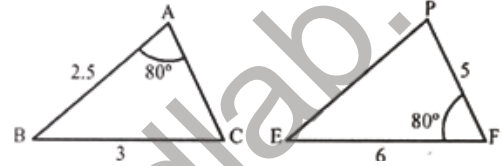


17. बताइए कि नीचे दिए गए आकृति में त्रिभुजों के युग्म समरूप है या नहीं, यदि त्रिभुज समरूप है तो समरूपता की कसौटी को लिखिए तथा समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त करें।

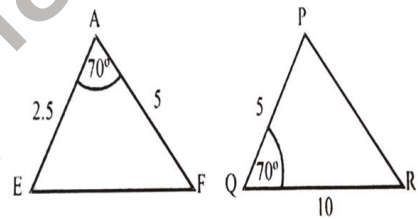


Ans:- हाँ, AAA समरूपता गुणधर्म से,
 $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

18. बताइए कि नीचे दिए गए आकृति में त्रिभुजों के युग्म समरूप है या नहीं, यदि त्रिभुज समरूप है तो समरूपता की कसौटी को लिखिए तथा समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त करें।



Ans:- नहीं
 19. बताइए कि नीचे दिए गए आकृति में त्रिभुजों के युग्म समरूप है या नहीं, यदि त्रिभुज समरूप है तो समरूपता की कसौटी को लिखिए तथा समरूप त्रिभुजों को सांकेतिक रूप में व्यक्त करें।



Ans:- हाँ, SAS समरूपता गुणधर्म से,
 $\Delta EAF \sim \Delta PQR$

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

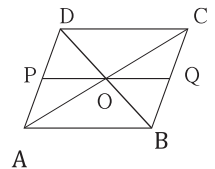
20. एक चतुर्भुज ABCD के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं कि $AO/CO = BO/DO$ है। सिद्ध कीजिए कि ABCD एक समलम्ब है।

Ans:- दिया गया है कि,

ABCD एक चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण AC और BD एक दूसरे को बिन्दु 'O' पर प्रतिच्छेद करते हैं की

$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} \quad \text{--- ①}$$

सिद्ध करना है:- ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है अर्थात् $AB \parallel DC$



रचना :- $POQ \parallel DC$ खींचा

प्रमाण :-

ΔBDC में
 $\therefore OQ \parallel DC$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{BO}{OD} \quad (\text{थेल्स प्रमेय से})$$

$$\Rightarrow \frac{BQ}{QC} = \frac{AO}{CO} \quad [\text{समी. ① से}]$$

$$\Rightarrow \frac{CO}{AO} = \frac{QC}{BQ} \quad \Rightarrow \frac{CO}{OA} = \frac{CQ}{QB}$$

थेल्स प्रमेय के विलोम से,
 $OQ \parallel AB$

$$\Rightarrow POQ \parallel AB \quad \Rightarrow POQ \parallel AB \parallel DC$$

$$\Rightarrow AB \parallel DC$$

\therefore ABCD एक समलम्ब चतुर्भुज है। Proved

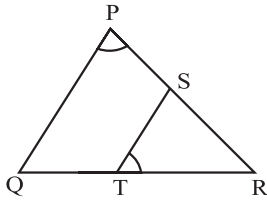
21. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 cm^2 और 121 cm^2 है। यदि $EF = 15.4 \text{ cm}$ हो, तो BC ज्ञात कीजिए।

Ans:- दिया गया है $Ar(\Delta ABC) = 64 \text{ cm}^2$ और $Ar(\Delta DEF) = 121 \text{ cm}^2$
 $EF = 15.4 \text{ cm}$, $BC = ?$

$$\begin{aligned} \because \Delta ABC &\sim \Delta DEF \\ \Rightarrow \frac{Ar(\Delta ABC)}{Ar(\Delta DEF)} &= \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{64}{121} &= \left(\frac{BC}{15.4}\right)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{64}{121}} &= \frac{BC}{15.4} \\ \Rightarrow \frac{8}{11} &= \frac{BC}{15.4} \\ \Rightarrow BC \times 11 &= 8 \times 15.4 \\ \Rightarrow BC &= \frac{8 \times 15.4}{11} = 11.2 \text{ cm} \\ \therefore BC &= 11.2 \text{ cm Ans.} \end{aligned}$$

22. ΔPQR की भुजाओं PR और QR पर क्रमशः बिंदु S और T इस प्रकार स्थित हैं कि $\angle P = \angle RTS$ है। दर्शाइए कि $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ है।

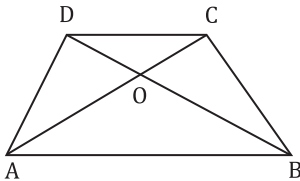
Ans:-



दिया गया है $\angle P = \angle RTS$
 सिद्ध करना है $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$
 प्रमाण $\because \Delta RPQ \sim \Delta RTS$ में,
 $\angle R = \angle R$ (उभयनिष्ठ कोण)
 $\angle P = \angle RTS$ (दिया है)
 AA समरूपता गुणधर्म से
 $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$
 Hence Proved

23. एक समलंब $ABCD$ जिसमें $AB \parallel DC$ है, के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि $AB = 2 CD$ हो, तो त्रिभुजों ΔAOB और ΔCOD का अनुपात ज्ञात कीजिये।

Ans:-



दिया गया है कि,
 $AB \parallel DC$
 और $AB = 2 CD$
 ΔAOB और ΔCOD में,
 $\angle AOB = \angle COD$ (शीर्षाभिमुख कोण)
 $\angle OAB = \angle OCD$ (एकान्तर अन्तः कोण)
 \therefore AA समरूपता गुणधर्म से
 $\Delta AOB \sim \Delta COD$

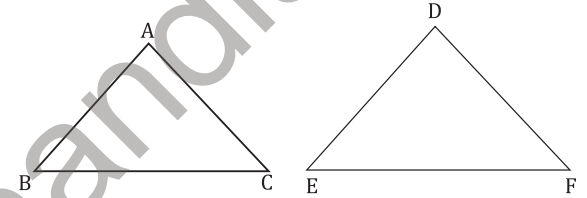
अब,

$$\begin{aligned} \therefore \frac{Ar(\Delta AOB)}{Ar(\Delta COD)} &= \left(\frac{AO}{CO}\right)^2 = \left(\frac{OB}{OD}\right)^2 = \left(\frac{AB}{CD}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{Ar(\Delta AOB)}{Ar(\Delta COD)} &= \left(\frac{2 CD}{CD}\right)^2 = \frac{4}{1} [\because AB = 2CD] \end{aligned}$$

अतः अभीष्ट अनुपात 4:1 है।

24. यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

Ans:-



दिया गया है कि,

$$\begin{aligned} \Delta ABC &\sim \Delta DEF \text{ और } Ar(\Delta ABC) = Ar(\Delta DEF) \\ \therefore \Delta ABC &\sim \Delta DEF \\ \Rightarrow \frac{Ar(\Delta ABC)}{Ar(\Delta DEF)} &= \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{Ar(\Delta ABC)}{Ar(\Delta DEF)} &= \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 &= 1, \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = 1 \text{ और } \left(\frac{AC}{DF}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{AB}{DE} = 1, \frac{BC}{EF} = 1 \text{ और } \frac{AC}{DF} = 1$$

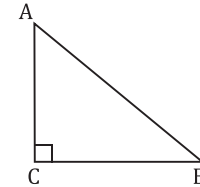
$$\Rightarrow AB = DE, BC = EF \text{ और } AC = DF$$

SSS से सर्वांगसमता के नियम से,

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF \text{ Hence Proved}$$

25. ΔABC में यदि कोण C समकोण है तथा $AC = BC$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है।

Ans:-



दिया गया है $\because \Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है जिसमें
 $\angle C = 90^\circ$ तथा $AC = BC$.

सिद्ध करना है $\because AB^2 = 2AC^2$

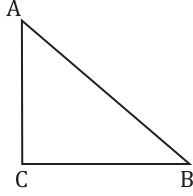
$$\begin{aligned} \text{प्रमाण:-} \\ AB^2 &= AC^2 + BC^2 \text{ (पाइथागोरस प्रमेय से)} \\ \Rightarrow AB^2 &= AC^2 + AC^2 \quad [\because AC = BC] \end{aligned}$$

$$\therefore AB^2 = 2AC^2 \text{ Hence Proved}$$

26. ΔABC यदि एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है। यदि

$AB^2 = 2AC^2$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।

Ans:-



दिया गया है:- ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ और $AB^2 = 2AC^2$

सिद्ध करना है:- ABC एक समकोण त्रिभुज है।

प्रमाण:-

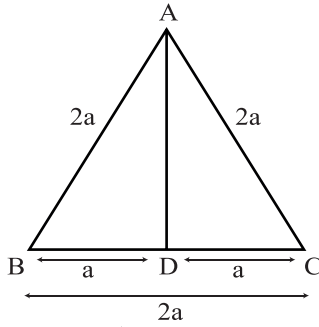
$$\begin{aligned} \therefore AB^2 &= 2AC^2 \\ \Rightarrow AB^2 &= AC^2 + AC^2 \\ \Rightarrow AB^2 &= AC^2 + BC^2 \quad [\because AC = BC] \end{aligned}$$

पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से $\angle ACB = 90^\circ$

\therefore ABC एक समकोण त्रिभुज है।

27. एक समबाहु त्रिभुज की भुजा $2a$ है। इसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात करें।

Ans:-



दिया गया है:- ABC एक समबाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = BC = AC = 2a$

$AD \perp BC$ खींचा

$\triangle ADB$ और $\triangle ADC$ में

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ)

$AB = AC$

$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$

RHS सर्वांगसमता की कसौटी से

$\triangle ADB \cong \triangle ADC$

$BD = DC$ (CPCT से)

$\therefore BD = DC = a$

$\triangle ADB$ में

पाइथागोरस प्रमेय से,

$\therefore AD^2 + BD^2 = AB^2$

$\Rightarrow AD^2 + a^2 = (2a)^2$

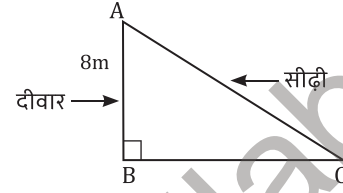
$\Rightarrow AD^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

$\Rightarrow AD = \sqrt{3} a$ मात्रक

समबाहु \triangle के प्रत्येक शीर्ष लंब की लम्बाई $= \sqrt{3} a$ मात्रक

28. 10m लंबी एक सीढ़ी एक दीवार पर टिकाने पर भूमि से 8m की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

Ans:-



$AB = 8m$

$AC = 10m$

$BC = ?$

\therefore ABC एक समकोण त्रिभुज है

\therefore पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\Rightarrow (8)^2 + BC^2 = (10)^2$

$\Rightarrow 64 + BC^2 = 100$

$\Rightarrow BC^2 = 100 - 64 = 36$

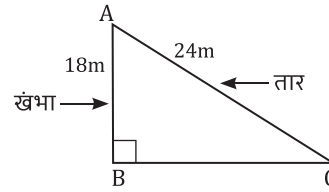
$\Rightarrow BC = \sqrt{36} = 6m$ Ans.

दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी 6 m है।

29.

18 m ऊँचे एक ऊर्ध्वाधर खंभे के ऊपरी सिरे से एक तार का एक सिरा जुड़ा हुआ है तथा तार का दूसरा सिरा एक खूँटे से जुड़ा हुआ है। खंभे के आधार से खूँटे को कितनी दूरी पर गाड़ा जाए कि तार तना रहे जबकि तार की लंबाई 24 m है।

Ans:-



$AB = 18m$

$AC = 24m$

$BC = ?$

\therefore ABC एक समकोण त्रिभुज है।

\therefore पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\Rightarrow (18)^2 + BC^2 = (24)^2$

$\Rightarrow 324 + BC^2 = 576$

$\Rightarrow BC^2 = 576 - 324$

$\Rightarrow BC^2 = 252$

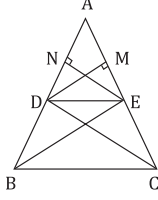
$\Rightarrow BC = \sqrt{252} m = 6\sqrt{7} m$

खंभे के आधार से खूँटे की दूरी $6\sqrt{7} m$ है।

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

30. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को भिन्न भिन्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने वाली रेखा उन्हें समान अनुपात में विभाजित करती है।

Ans:-



दिया गया है:- ABC एक त्रिभुज है जिसमें DE , भुजा BC के समांतर है जो AB और AC के बिन्दु D और E पर प्रतिच्छेद करती है।

सिद्ध करना है:- $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

रचना:- $DM \perp AC$ और $EN \perp AB$ खींचा तथा बिंदु B से बिंदु E

और बिंदु C से बिंदु D को मिलाया।

प्रमाण:-

$$\frac{Ar(\triangle ADE)}{Ar(\triangle BDE)} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times DB \times EN} = \frac{AD}{DB}$$

$$\Rightarrow \frac{Ar(\triangle ADE)}{Ar(\triangle BDE)} = \frac{AD}{DB} \dots\dots\dots(1)$$

पुनः

$$\frac{Ar(\triangle ADE)}{Ar(\triangle DEC)} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM}$$

$$\Rightarrow \frac{Ar(\triangle ADE)}{Ar(\triangle DEC)} = \frac{AE}{EC} \dots\dots\dots(2)$$

$\therefore \triangle BDE$ और $\triangle DEC$ एक ही आधार DE और समान समांतर रेखाओं DE और BC के बीच बने त्रिभुज है।

$$\therefore Ar(\triangle BDE) = Ar(\triangle DEC)$$

$$\therefore \frac{Ar(\triangle ADE)}{Ar(\triangle BDE)} = \frac{Ar(\triangle ADE)}{Ar(\triangle DEC)}$$

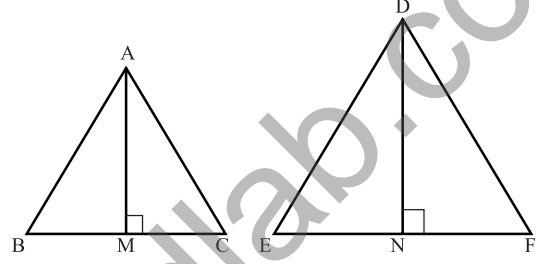
समीकरण (1) और समीकरण (2) से

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Hence Proved.

31. सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है।

Ans:-



दिया गया है:- दो त्रिभुज ABC और DEF इस प्रकार है कि

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\text{सिद्ध करना है:- } \frac{Ar(\triangle ABC)}{Ar(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2$$

रचना:- $AM \perp BC$ और $DN \perp EF$ खींचा।

प्रमाण:-

$$\frac{Ar(\triangle ABC)}{Ar(\triangle DEF)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times EF \times DN}$$

$$\Rightarrow \frac{Ar(\triangle ABC)}{Ar(\triangle DEF)} = \left(\frac{BC}{EF}\right) \times \left(\frac{AM}{DN}\right) \dots\dots\dots(1)$$

$\triangle ABM$ और $\triangle DEN$ में

$$\angle AMB = \angle DNE = 90^\circ$$

$$\angle B = \angle E \quad [\because \triangle ABC \sim \triangle DEF]$$

$\therefore AA$ समरूपता गुणधर्म से

$$\triangle ABM \sim \triangle DEN$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AM}{DN} = \frac{BM}{EN} \quad (\text{समरूप त्रिभुज के संगत भुजा})$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{AM}{DN} \dots\dots\dots(2)$$

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF$ (दिया है)

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \quad (\text{समरूप त्रिभुज के संगत भुजा})$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \dots\dots\dots(3)$$

समीकरण (2) और समीकरण (3) से

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AM}{DN} \dots\dots\dots(4)$$

समीकरण (4) से $\frac{AM}{DN}$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$\therefore \frac{Ar(\triangle ABC)}{Ar(\triangle DEF)} = \frac{BC}{EF} \times \frac{BC}{EF} = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2$$

इसी तरह हम प्राप्त कर सकते हैं,

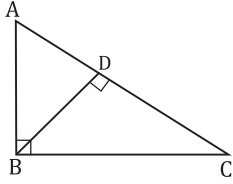
$$\frac{Ar(\triangle ABC)}{Ar(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2$$

$$\therefore \frac{Ar(\triangle ABC)}{Ar(\triangle DEF)} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EF}\right)^2 = \left(\frac{AC}{DF}\right)^2$$

Hence Proved.

32. सिद्ध कीजिए कि किसी समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

Ans:-



दिया गया है:- ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC = 90^\circ$

सिद्ध करना है:- $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना:- $BD \perp AC$ खींचा।

प्रमाण:-

$\triangle ADB$ और $\triangle ABC$ में

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\angle ADB = \angle ABC = 90^\circ$

\therefore AA समरूपता की कसौटी से,

$\triangle ADB \sim \triangle ABC$

$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DB}{BC} = \frac{AB}{AC}$ (समरूप त्रिभुज के संगत भुजा)

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ [पहला और अंतिम पद को लेने पर]

$\therefore AB^2 = AD \times AC$ (1)

पुनः

$\triangle BDC$ और $\triangle ABC$ में

$\angle BDC = \angle ABC = 90^\circ$

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ कोण)

AA समरूपता की कसौटी से

$\triangle BDC \sim \triangle ABC$

$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC}$ (समरूप त्रिभुज के संगत भुजा)

$\Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC}$ [दूसरा और अंतिम पद लेने पर]

$\therefore BC^2 = DC \times AC$ (2)

समीकरण (1) तथा समीकरण (2) को जोड़ने पर

$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = (AD + DC) \times AC$

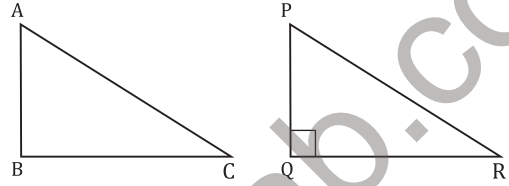
$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC \times AC$

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

Hence Proved.

33. यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि पहली भुजा के सामने का कोण समकोण होता है।

Ans:-



दिया गया है:- ABC एक त्रिभुज है जिसमें $AC^2 = AB^2 + BC^2$

सिद्ध करना है:- $\angle ABC = 90^\circ$

रचना:- $\triangle PQR$ की रचना करते हैं जिसमें $\angle PQR = 90^\circ$ तथा $AB = PQ$ और $BC = QR$ है।

प्रमाण:-

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (1) (दिया गया है)

$\triangle PQR$ में

$\therefore \angle PQR = 90^\circ$

\therefore पाइथागोरस प्रमेय से

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$

$\therefore PR^2 = AB^2 + BC^2$ (2) [रचना से $PQ = AB, QR = BC$]

समीकरण (1) और समीकरण (2) से

$AC^2 = PR^2$

$\therefore AC = PR$ (3)

$\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में

$AC = PR$ (समीकरण 3 से)

$AB = PQ$ (रचना से)

$BC = QR$ (रचना से)

SSS सर्वांगसमता गुणधर्म से,

$\triangle ABC \cong \triangle PQR$

$\angle ABC = \angle PQR$ (CPCT से)

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$ [रचना से $\angle PQR = 90^\circ$]

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$

Hence Proved.

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए:

- मूल बिंदु से बिंदु P(3, 4) की दूरी है -
(a) 3 मात्रक (b) 4 मात्रक
(c) 5 मात्रक (d) इनमें से कोई नहीं
- x- निर्देशांक को कहते हैं-
(a) भुज (b) कोटि
(c) भुज-कोटि (d) तल
- y- निर्देशांक को कहते हैं-
(a) भुज (b) कोटि
(c) भुज-कोटि (d) लंब
- बिन्दुओं P (4, 6) और Q (6, 8) के बीच की दूरी है-
(a) 2 मात्रक (b) $2\sqrt{2}$ मात्रक
(c) $\sqrt{2}$ मात्रक (d) इनमें कोई नहीं
- बिन्दुओं (2,5) तथा (4,7) को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिन्दु है:
(a) (1, 2) (b) (5/2, 7/2)
(c) (3, 6) (d) (6, 12)
- A, B और C तीन बिंदु संरेखी होते हैं, जब :
(a) AB+BC=AC (b) AB+AC=BC
(c) AB - BC= AC (d) AB -AC=2BC
- यदि बिंदु A(2,3) , B(4,k) और (6,-3) संरेखी हो, तो k का मान होगा:
(a) 1 (b) 0
(c) 2 (d) 6
- बिंदुओं (5,-6) और (-1,-4) को जोड़ने वाले रेखाखंड को y-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करती है?
(a) 1:3 (b) 4:5
(c) 5:1 (d) 1:5
- बिन्दुओं A (5,2) , B(4,7) और C (7,-4) से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा:
(a) -2 वर्ग मात्रक (b) 2 वर्ग मात्रक
(c) 12 वर्ग मात्रक. (d) 6 वर्ग मात्रक
- यदि बिंदु A(6, 1), B(8, 2), C(9, 4) और D(p,3) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष इसी क्रम में हों, तो p का मान होगा:
(a) 6 (b) 5
(c) 7 (d) 8

Solution of M.C.Q

- | | |
|------|------|
| 1) c | 6) a |
| 2) a | 7) b |

- | | |
|------|-------|
| 3) b | 8) c |
| 4) b | 9) b |
| 5) c | 10) c |

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

11. बिन्दुओं P (-5, 7) और Q (-1, 3) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल. $\overline{P(-5, 7) \quad Q(-1, 3)}$

$$x_1 = -5 \quad y_1 = 7$$

$$x_2 = -1 \quad y_2 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{दूरी सूत्र} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-1 - (-5))^2 + (3 - 7)^2} \\ &= \sqrt{(-1 + 5)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{(4)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ मात्रक Ans.} \end{aligned}$$

12. बिन्दुओं P (a, b) और Q (-a, -b) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल. $\overline{P(a, b) \quad Q(-a, -b)}$

$$x_1 = a \quad y_1 = b$$

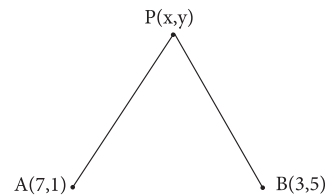
$$x_2 = -a \quad y_2 = -b$$

$$\begin{aligned} \text{दूरी सूत्र} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-a - a)^2 + (-b - b)^2} \\ &= \sqrt{(-2a)^2 + (-2b)^2} \\ &= \sqrt{4a^2 + 4b^2} \\ &= \sqrt{4(a^2 + b^2)} = 2\sqrt{a^2 + b^2} \text{ मात्रक Ans..} \end{aligned}$$

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

13. x और y एक संबंध ज्ञात कीजिए, ताकि बिंदु (x,y) बिंदुओं (7,1) और (3, 5) से समदूरस्थ है।

हल.



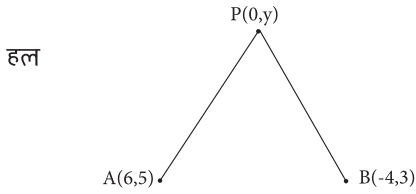
$$\therefore PA = PB$$

$$\therefore (PA)^2 = (PB)^2$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \{\sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}\}^2 = \{\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}\}^2 \\ &\Rightarrow (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 - 2 \times x \times 7 + 49 + y^2 - 2 \times 1 \times y + 1 &= \\ x^2 - 2 \times x \times 3 + 9 + y^2 - 2 \times 5 \times y + 25 & \\ \Rightarrow -14x - 2y + 50 &= -6x - 10y + 34 \\ \Rightarrow -14x + 6x - 2y + 10y &= 34 - 50 \\ \Rightarrow -8x + 8y &= -16 \\ \Rightarrow -8(x - y) &= -16 \\ \Rightarrow x - y &= \frac{-16}{-8} = 2 \\ \therefore x - y - 2 &= 0 \text{ Ans...} \end{aligned}$$

14. Y- अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (6,5) और (-4,3) से समदूरस्थ है।



माना बिंदु P(0,y) बिन्दुओं A(6,5) तथा B(-4,3) से समदूरस्थ है।

$$\begin{aligned} \therefore PA &= PB \\ \therefore (PA)^2 &= (PB)^2 \\ \Rightarrow \{\sqrt{(0-6)^2 + (y-5)^2}\}^2 &= \{\sqrt{(0-(-4))^2 + (y-3)^2}\}^2 \\ \Rightarrow (-6)^2 + (y-5)^2 &= (4)^2 + (y-3)^2 \\ \Rightarrow 36 + y^2 - 2 \times y \times 5 + 25 &= 16 + y^2 - 2 \times 3 \times y + 9 \\ \Rightarrow -10y + 61 &= 25 - 6y \\ \Rightarrow -10y + 6y &= 25 - 61 \\ \Rightarrow -4y &= -36 \\ \Rightarrow y &= \frac{36}{4} = 9 \\ \text{अतः अभीष्ट बिंदु } (0, 9) &\text{ है।} \end{aligned}$$

15. y का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए बिंदु P(2,-3) और Q(10,y) के बीच की दूरी 10 मात्रक है।

हल .

$$\begin{aligned} P(2,-3) \quad Q(10,y) \\ x_1 = 2, y_1 = -3 \\ x_2 = 10, y_2 = y \\ \text{दिया गया है } PQ = 10 \text{ मात्रक} \\ \therefore \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} &= 10 \\ \Rightarrow \sqrt{(10-2)^2 + (y-(-3))^2} &= 10 \\ \Rightarrow (8)^2 + (y+3)^2 &= 100 \\ \Rightarrow 64 + y^2 + 2 \times y \times 3 + 9 &= 100 \\ \Rightarrow y^2 + 6y + 73 - 100 &= 0 \\ \Rightarrow y^2 + 6y - 27 &= 0 \\ \Rightarrow y^2 + 9y - 3y - 27 &= 0 \\ \Rightarrow y(y+9) - 3(y+9) &= 0 \\ \Rightarrow (y+9)(y-3) &= 0 \\ \Rightarrow y+9 = 0 \text{ or } y-3 &= 0 \\ \therefore y = -9 \text{ or } y = 3 &\text{ Ans.} \end{aligned}$$

16. बिन्दु (-4, 6) बिंदुओं A (-6, 10) और B (3, -8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को किस अनुपात में विभाजित करता है।

हल .

$$\begin{array}{ccc} A(-6,10) & k & 1 & B(3,-8) \\ & \text{-----} & & \\ & & P(-4,6) & \end{array}$$

माना लिया की बिंदु P(-4,6) AB रेखाखंड को K:1 के अनुपात में विभाजित करता है।

यहाँ

$$x_1 = -6, \quad y_1 = 10 \quad m = k, \quad n = 1$$

$$x_2 = 3, \quad y_2 = -8 \quad x = -4, \quad y = 6$$

विभाजन सूत्र से,

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$\Rightarrow -4 = \frac{k \times 3 + 1 \times (-6)}{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{1} = \frac{3k-6}{k+1}$$

$$\Rightarrow -4(k+1) = 1(3k-6)$$

$$\Rightarrow -4k-4 = 3k-6$$

$$\Rightarrow -4k-3k = -6+4$$

$$\Rightarrow -7k = -2$$

$$\therefore k = \frac{2}{7}$$

अतः अभीष्ट अनुपात 2:7 है।

17. बिन्दुओं (-3,10) और (6, 8) को जोड़ने वाले रेखाखंड को बिन्दु (-1, 6) किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल. मान लिया कि बिंदु P(-1, 6) रेखाखंड PQ को K:1 के अनुपात में विभाजित करता है

$$\begin{array}{ccc} P(-3,10) & k & 1 & Q(6,8) \\ & \text{-----} & & \\ & & P(-1,6) & \end{array}$$

यहाँ

$$x_1 = -3, \quad y_1 = 10 \quad m = k, \quad n = 1$$

$$x_2 = 6, \quad y_2 = 8 \quad x = -1, \quad y = 6$$

विभाजन सूत्र से,

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{k \times 6 + 1 \times (-3)}{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{1} = \frac{6k-3}{k+1}$$

$$\Rightarrow 6k-3 = -1(k+1)$$

$$\Rightarrow 6k-3 = -k-1$$

$$\Rightarrow 6k+k = -1+3$$

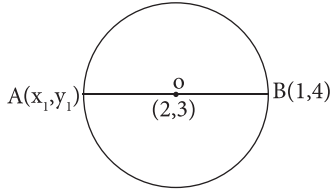
$$\Rightarrow 7k = 2$$

$$\therefore k = \frac{2}{7}$$

अतः अभीष्ट अनुपात 2:7 है।

18. बिन्दु A का निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ AB एक वृत्त का व्यास है जिसका केन्द्र (2,3) है तथा B के निर्देशांक (1, 4) हैं।

हल.



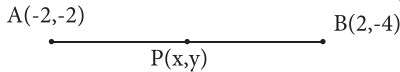
हम जानते हैं कि वृत्त का केंद्र उसके व्यास का मध्य बिंदु होता है।

∴ बिंदु O रेखाखंड AB का मध्य बिंदु है।

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{x_1 + x_2}{2} & & y = \frac{y_1 + y_2}{2} \\ \Rightarrow \frac{2}{1} &= \frac{x_1 + 1}{2} & & \frac{3}{1} = \frac{y_1 + 4}{2} \\ \Rightarrow 4 &= x_1 + 1 & & 6 = y_1 + 4 \\ \Rightarrow 4 - 1 &= x_1 & & 6 - 4 = y_1 \\ \Rightarrow x_1 &= 3 & & y_1 = 2 \\ \text{अतः बिंदु A का निर्देशांक} & & & (3, 2) \text{ है।} \end{aligned}$$

19. यदि A(-2,-2) और B (2,-4) को मिलाने वाले रेखाखंड पर बिंदु P इस प्रकार स्थित है कि AP = 3/7 AB है। बिंदु P का निर्देशांक ज्ञात कीजिए

हल.



दिया गया है,

$$\begin{aligned} AP &= \frac{3}{7} AB \\ \Rightarrow \frac{7}{3} &= \frac{AB}{AP} \\ \Rightarrow \frac{7}{3} - \frac{1}{1} &= \frac{AB}{AP} - \frac{1}{1} \\ \Rightarrow \frac{7-3}{3} &= \frac{AB-AP}{AP} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{4}{3} &= \frac{BP}{AP} \\ \Rightarrow \frac{AP}{BP} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

∴ AP : BP = 3 : 4

विभाजन सूत्र से,

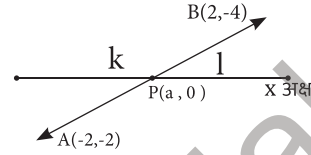
$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{mx_2 + mx_1}{m+n} & & y = \frac{my_2 + my_1}{m+n} \\ \Rightarrow x &= \frac{3 \times 2 + 4 \times (-2)}{3+4} & & y = \frac{3 \times (-4) + 4 \times (-2)}{3+4} \\ \Rightarrow x &= \frac{6-8}{7} & & y = \frac{-12-8}{7} \\ \Rightarrow x &= \frac{-2}{7} & & y = \frac{-20}{7} \\ \therefore P & & & \left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7} \right) \end{aligned}$$

अतः बिंदु P का निर्देशांक $\left(\frac{-2}{7}, \frac{-20}{7} \right)$ है

- 20.

वह अनुपात ज्ञात कीजिए, जिसमें बिंदुओं A(1,-5) और B(-4,5) को मिलाने वाला रेखाखंड x-अक्ष से विभाजित होता है।

हल.



माना x-अक्ष पर स्थित बिंदु P(a,0) रेखाखंड AB को k:1 में आन्तरिक रूप से विभाजित करता है।

$$\begin{aligned} \text{यहाँ} \\ x_1 &= -2, y_1 = -2 \\ x_2 &= 2, y_2 = -4 \\ x &= a, y = 0 \\ m &= k, n = 1 \\ \text{विभाजन सूत्र से,} \end{aligned}$$

$$\therefore y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{k \times 5 + 1 \times -5}{k+1}$$

$$\Rightarrow 0 = 5k - 5$$

$$\Rightarrow 5k = 5$$

$$\Rightarrow k = \frac{5}{5} = 1$$

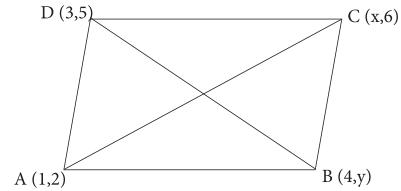
$$\therefore k = 1 : 1$$

अतः x-अक्ष रेखाखंड AB को 1:1 में विभाजित करता है।

- 21.

यदि बिंदु A(1,2), B(4, y), C(x, 6) और D(3,5) इसी क्रम में लेने पर, एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हों, तो x और y ज्ञात कीजिए।

हल.



∴ हम जानते हैं कि समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दुसरे को समद्विभाजित करते हैं।

∴ AC का मध्य बिंदु = BD का मध्य बिंदु

$$\Rightarrow \left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+6}{2} \right) = \left(\frac{4+3}{2}, \frac{y+5}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1+x}{2} = \frac{4+3}{2} & \frac{2+6}{2} = \frac{y+5}{2}$$

$$\Rightarrow 1+x = 7 & y+5 = 8$$

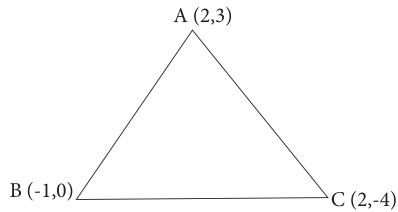
$$\Rightarrow x = 7-1 & y = 8-5$$

$$\Rightarrow x = 6 & y = 3$$

$$\text{अतः } x = 6 \quad y = 3 \quad \text{Ans.}$$

22. बिन्दुओं A (2,3) , B(-1,0) और AC (2,-4) से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल.



यहाँ

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 3$$

$$x_2 = -1, \quad y_2 = 0$$

$$x_3 = 2, \quad y_3 = -4$$

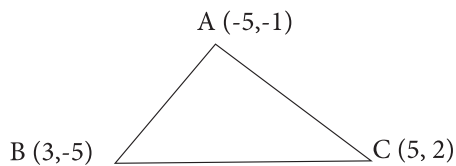
ΔABC का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ &= \frac{1}{2} [2\{0 - (-4)\} + (-1)(-4 - 3) + 2(3 - 0)] \\ &= \frac{1}{2} [2 \times 4 + (-1) \times (-7) + 2 \times 3] \\ &= \frac{1}{2} [8 + 7 + 6] \\ &= \frac{21}{2} \text{ वर्ग मात्रक} \end{aligned}$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{21}{2}$ वर्ग मात्रक है।

23. बिन्दुओं A (-5,-1) , B(3,-5) और C (5,2) से बनने वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल.



यहाँ

$$x_1 = -5, \quad y_1 = -1$$

$$x_2 = 3, \quad y_2 = -5$$

$$x_3 = 5, \quad y_3 = 2$$

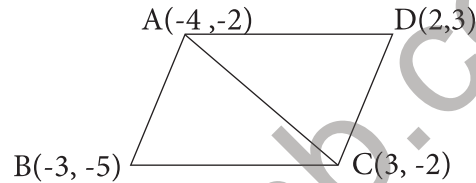
ΔABC का क्षेत्रफल =

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ &= \frac{1}{2} [-5(-5 - 2) + 3(2 - (-1)) + 5(-1 - (-5))] \\ &= \frac{1}{2} [-5 \times (-7) + 3 \times (2 + 1) + 5(-1 + 5)] \\ &= \frac{1}{2} [35 + 3 \times 3 + 5 \times 4] \\ &= \frac{1}{2} [35 + 9 + 20] \\ &= \frac{1}{2} \times 64 = 32 \text{ वर्ग मात्रक} \end{aligned}$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल 32 वर्ग मात्रक है।

24. यदि बिंदु A(-4,-2) , B(-3,-5) , (3,-2) और (2, 3) एक चतुर्भुज ABCD के शीर्ष हों, तो चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल.



ΔABC के लिए

$$x_1 = -4, \quad y_1 = -2$$

$$x_2 = -3, \quad y_2 = -5$$

$$x_3 = 3, \quad y_3 = -2$$

ΔABC का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ &= \frac{1}{2} [(-4)\{-5 - (-2)\} + (-3)\{-2 - (-2)\} + 3\{-2 - (-5)\}] \\ &= \frac{1}{2} [(-4)(-5 + 2) + (-3)(-2 + 2) + 3(-2 + 5)] \\ &= \frac{1}{2} [(-4) \times (-3) + -3 \times 0 + 3 \times 3] \\ &= \frac{1}{2} [12 + 0 + 9] \\ &= \frac{21}{2} \text{ वर्ग मात्रक} \end{aligned}$$

ΔACD के लिए

$$x_1 = -4, \quad y_1 = -2$$

$$x_2 = 3, \quad y_2 = -2$$

$$x_3 = 2, \quad y_3 = 3$$

ΔACD का क्षेत्रफल =

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ &= \frac{1}{2} [(-4)(-2 - 3) + 3(3 + 2) + 2 \times \{-2 - (-2)\}] \\ &= \frac{1}{2} [(-4) \times (-5) + 3(3 + 2) + 2 \times (-2 + 2)] \\ &= \frac{1}{2} [20 + 15 + 2 \times 0] \\ &= \frac{35}{2} \text{ वर्ग मात्रक} \end{aligned}$$

चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔACD का क्षेत्रफल

$$= \frac{21}{2} + \frac{35}{2} = \frac{21 + 35}{2} = \frac{56}{2} = 28 \text{ वर्ग मात्रक}$$

अतः चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल 28 वर्ग मात्रक है।

25. K का मान ज्ञात कीजिए यदि बिंदु A (2, 3) B, (4, k) और C (6, 3) संरेखी हैं।

हल.



दिया गया है A(2,3) , B(4,k) और C(6, 3)

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 3$$

$$x_2 = 4, \quad y_2 = k$$

$$x_3 = 6, \quad y_3 = 3$$

∴ बिन्दु A, B और C संरेखी है।

∴ ΔABC का क्षेत्रफल = 0

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$$

$$\Rightarrow x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

$$\Rightarrow 2(k - 3) + 4(-3 - 3) + 6(3 - k) = 0$$

$$\Rightarrow 2k - 6 + 4 \times 0 + 18 - 6k = 0$$

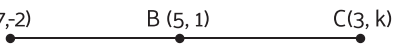
$$\Rightarrow -4k + 12 = 0$$

$$\Rightarrow -4k = -12$$

$$\Rightarrow k = \frac{12}{4} = 3$$

$$\therefore k = 3$$

26. यदि बिंदु A(7,-2), B(5,1) और (3,k) संरेखी हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल . 

दिया गया है A(7,-2), B(5,1) और C(3, k)

$$x_1 = 7, \quad y_1 = -2$$

$$x_2 = 5, \quad y_2 = 1$$

$$x_3 = 3, \quad y_3 = k$$

∴ बिन्दु A, B और C संरेखी है।

∴ ΔABC का क्षेत्रफल = 0

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$$

$$\Rightarrow x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0$$

$$\Rightarrow 7(1 - k) + 5(k - (-2)) + 3(-2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 7 - 7k + 5(k + 2) + 3 \times (-3) = 0$$

$$\Rightarrow 7 - 7k + 5 + 10 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow -2k + 8 = 0$$

$$\Rightarrow -2k = -8$$

$$\Rightarrow k = \frac{8}{2} = 4$$

$$\therefore k = 4 \quad \text{Ans...}$$

Multiple Choice Question

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए:

Q 1. यदि $\sin A = \frac{3}{5}$ हो तो $\tan A$ का मान होगा:

- (a) $\frac{4}{5}$ (b) $\frac{4}{3}$
(c) $\frac{5}{3}$ (d) $\frac{3}{4}$

Q 2. यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ हो तो $\cos A$ का मान होगा:

- (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

Q 3. यदि $2\sin A = \sin 2A$ हो, तो A का मान होगा:

- (a) 30° (b) 45°
(c) 0° (d) 90°

Q 4. $\cos 48^\circ - \sin 42^\circ$ का मान होगा:

- (a) $\cos 6^\circ$ (b) 0
(c) 1 (d) $\sin 6^\circ$

Q 5. $\sin 30^\circ$ का मान है:

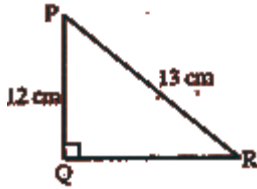
- (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
(c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$

Q 6. यदि $2\cos A = 1$ हो, तो A का मान होगा:

- (a) 45° (b) 30°
(c) 90° (d) 60°

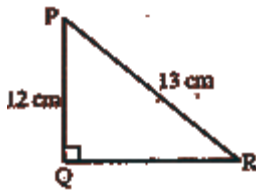
Q 7. आकृति में $\sin P$ का मान होगा:

- (a) $\frac{13}{5}$ (b) $\frac{5}{13}$
(c) $\frac{12}{5}$ (d) $\frac{5}{12}$



Q 8. आकृति में $\tan P - \cot R$ का मान होगा:

- (a) 12 (b) 0
(c) 1 (d) 13



Q 9. $\frac{\sin 64^\circ}{\cos 26^\circ}$ का मान होगा?

- (a) 1 (b) 0

(c) 2

(d) इनमें से कोई नहीं

Q 10. यदि $\tan 2A = \cot (A - 18^\circ)$, जहाँ $2A$ एक न्यून कोण है, तो कोण A का मान होगा:

- (a) 45° (b) 36°
(c) 27° (d) 40°

Q 11. यदि $\tan A = \cot B$, तो $A + B$ का मान होगा:

- (a) 50° (b) 30°
(c) 90° (d) 70°

Q 12. $\tan 48^\circ \cdot \tan 23^\circ \cdot \tan 42^\circ \cdot \tan 67^\circ$ का मान होगा:

- (a) 1 (b) 0
(c) $\cot 30^\circ$ (d) इनमें से कोई नहीं

Q 13. $2\cos 90^\circ \cdot \sin 90^\circ$ का मान होगा:

- (a) 0 (b) 1
(c) $\operatorname{cosec} 45^\circ$ (d) इनमें से कोई नहीं

Q 14. $9\sec^2 A - 9\tan^2 A$ बराबर है:

- (a) 1 (b) 9
(c) 8 (d) 0

Q 15. $(\sec A + \tan A)(1 - \sin A)$ बराबर है:

- (a) $\sec A$ (b) $\sin A$
(c) $\operatorname{cosec} A$ (d) $\cos A$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न का हल

1 - (d) 2 - (a) 3 - (c) 4 - (b) 5 - (d) 6 - (d) 7 - (b) 8 - (b) 9 - (a)
10 - (b) 11 - (c) 12 - (a) 13 - (a) 14 - (b) 15 - (d)

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

Q 16. $\sin 18^\circ / \cos 72^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{Ans:- } & \therefore \frac{\sin 18^\circ}{\cos 72^\circ} \\ & = \frac{\sin 18^\circ}{\cos(90^\circ - 18^\circ)} \\ & = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ} \quad [\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta] \\ & = 1 \end{aligned}$$

Q 17. $\operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{Ans:- } & \therefore \operatorname{cosec} 31^\circ - \sec 59^\circ \\ & = \operatorname{cosec} 31^\circ - \sec(90^\circ - 31^\circ) \\ & = \operatorname{cosec} 31^\circ - \operatorname{cosec} 31^\circ \quad [\sec(90^\circ - \theta) = \operatorname{cosec} \theta] \\ & = 0 \end{aligned}$$

Q 18. $\tan 26^\circ / \cot 64^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{Ans:- } & \therefore \frac{\tan 26^\circ}{\cot 64^\circ} \\ & = \frac{\tan 26^\circ}{\cot(90^\circ - 26^\circ)} \\ & = \frac{\tan 26^\circ}{\tan 26^\circ} \quad [\cot(90^\circ - \theta) = \tan \theta] \\ & = 1 \end{aligned}$$

Q 19. $\tan 65^\circ - \cot 25^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans:- $\tan 65^\circ - \cot 25^\circ = \tan(90^\circ - 25^\circ) - \cot 25^\circ$
 $= \cot 25^\circ - \cot 25^\circ$ [$\because \tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta$]
 $= 0$

Q 20. $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

Ans:- $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$
 $= \sin(90^\circ - 23^\circ) + \cos(90^\circ - 15^\circ)$
 $= \cos 23^\circ + \sin 15^\circ$

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

Q 21. यदि $15 \cot A = 8$ हो, तो $\cos A$ और $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans:- $\because 15 \cot A = 8$
 $\therefore \cot A = \frac{8}{15} = \frac{b}{p}$
 माना $b = 8k$, $p = 15k$
 $\therefore h = \sqrt{p^2 + b^2}$
 $\Rightarrow h = \sqrt{(15k)^2 + (8k)^2}$
 $\Rightarrow h = \sqrt{225k^2 + 64k^2}$
 $\Rightarrow h = \sqrt{289k^2} = 17k$
 $\therefore \cos A = \frac{b}{h} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}$ / Ans.
 $\therefore \sec A = \frac{h}{b} = \frac{17k}{8k} = \frac{17}{8}$

Q 22. यदि $\sin A = \frac{3}{4}$ हो तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान ज्ञात करें।

$\therefore \sin A = \frac{3}{4} = \frac{p}{h}$
 माना $p = 3k$, $h = 4k$
 Ans:- $\because p^2 + b^2 = h^2$
 $(3k)^2 + b^2 = (4k)^2$
 $\Rightarrow 9k^2 + b^2 = 16k^2$
 $\Rightarrow b^2 = 16k^2 - 9k^2$
 $\Rightarrow b = \sqrt{7k^2} = \sqrt{7}k$
 $\therefore \cos A = \frac{b}{h} = \frac{\sqrt{7}k}{4k} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ / Ans.
 $\therefore \tan A = \frac{p}{b} = \frac{3k}{\sqrt{7}k} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

Q 23. $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans:- $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Q 24. $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

Ans:- $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$
 $= 2 \times (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$
 $= 2 \times 1 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}$
 $= 2$ Ans

Q 25. यदि $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$ तथा $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$ हो, तो A और B का मान ज्ञात कीजिए जबकि $0^\circ < A + B \leq 90^\circ$ और $A > B$ है।

Ans:- $\therefore \sin(A-B) = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \sin(A-B) = \sin 30^\circ$
 $\Rightarrow A - B = 30^\circ$ (i)
 $\therefore \cos(A+B) = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \cos(A+B) = \cos 60^\circ$
 $\Rightarrow A + B = 60^\circ$ (ii)
 समी. (i) तथा समी. (ii) को जोड़ने पर
 $\Rightarrow A - B + A + B = 90^\circ$
 $\Rightarrow 2A = 90^\circ$
 $\Rightarrow A = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$
 A का मान समीकरण (ii) में रखने पर
 $45^\circ + B = 60^\circ$
 $\Rightarrow B = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$
 $\therefore A = 45^\circ$ /
 $\therefore B = 15^\circ$ / Ans.

Q 26. मान ज्ञात कीजिए: $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

Ans:- $\frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$
 $= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3+1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}$
 $= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Ans.

Q 27. यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$, जहाँ 4A एक न्यून कोण है, तो कोण A का मान ज्ञात कीजिए।

Ans:- $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$
 $\Rightarrow \operatorname{cosec}(90^\circ - 4A) = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$ [$\sec \theta = \operatorname{cosec}(90^\circ - \theta)$]
 $\Rightarrow 90^\circ - 4A = A - 20^\circ$
 $\Rightarrow 90^\circ + 20^\circ = A + 4A$
 $\Rightarrow 110^\circ = 5A$
 $\Rightarrow A = \frac{110^\circ}{5} = 22^\circ$ Ans.

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

Q 28. सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$$

Ans:-

$$\begin{aligned} L.H.S. &= \frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{1 + \frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}} \\ &= \frac{\cos A + 1}{\frac{1}{\cos A}} = 1 + \cos A \quad (i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R.H.S. &= \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A} = \frac{1 - \cos^2 A}{1 - \cos A} \\ &= \frac{1^2 - \cos^2 A}{1 - \cos A} = \frac{(1 - \cos A)(1 + \cos A)}{(1 - \cos A)} \\ &= 1 + \cos A \end{aligned}$$

∴ L.H.S = R.H.S Proved

Q 29. सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} = 1 + \sec \theta \operatorname{cosec} \theta$$

Ans:- L.H.S

$$\begin{aligned} &\frac{\tan \theta}{1 - \cot \theta} + \frac{\cot \theta}{1 - \tan \theta} \\ &= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}} + \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}{\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta}} + \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}}{\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta}} \\ &= \frac{\sin \theta \times \sin \theta}{\cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} + \frac{\cos \theta \times \cos \theta}{\sin \theta (\cos \theta - \sin \theta)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} + \frac{\cos^2 \theta}{-\sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)}$$

$$= \frac{\sin^3 \theta - \cos^3 \theta}{\sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)}$$

$$[\because a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab)]$$

$$= \frac{(\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta)}$$

$$= \frac{1 + \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \operatorname{cosec} \theta \times \sec \theta + 1$$

$$= 1 + \operatorname{cosec} \theta \times \sec \theta$$

∴ L.H.S. = R.H.S. Proved

Q 30. सिद्ध कीजिए कि:

$$(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

Ans:- L.H.S

$$\begin{aligned} &(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 \\ &= \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{1^2 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)}$$

∴ L.H.S = R.H.S Proved

Q 31. सिद्ध कीजिए कि:

$$\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}} = \sec A + \tan A$$

Ans:- L.H.S

$$\sqrt{\frac{1 + \sin A}{1 - \sin A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)}{(1 - \sin A)}} \times \frac{(1 + \sin A)}{(1 + \sin A)}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}} = \sqrt{\frac{(1 + \sin A)^2}{\cos^2 A}} \quad [\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A]$$

$$= \frac{(1 + \sin A)}{\cos A}$$

$$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \sec A + \tan A$$

∴ L.H.S. = R.H.S Proved

Q 32. सिद्ध कीजिए कि: $\sec A(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$

Ans:- L.H.S.

$$\sec A(1 - \sin A)(\sec A + \tan A)$$

$$= \frac{1}{\cos A} \times \frac{(1 - \sin A)}{1} \times \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} \right)$$

$$= \left(\frac{1 - \sin A}{\cos A} \right) \times \frac{(1 + \sin A)}{\cos A}$$

$$= \frac{1^2 - \sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} \quad [\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A]$$

$$= 1$$

∴ L.H.S = R.H.S Proved

Q 33. सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$$

Ans:- L.H.S.

$$= \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1}$$

अंश तथा हर के प्रत्येक पद को $\sin A$ से विभाजित करने पर

$$= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\sin A}{\sin A} + \frac{1}{\sin A}}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin A} - \frac{1}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cot A - 1 + \operatorname{cosec} A}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A}$$

$$= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A} \quad [\because \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1]$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} A + \cot A) - (\operatorname{cosec} A - \cot A)(\operatorname{cosec} A + \cot A)}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A}$$

$$= \frac{(\operatorname{cosec} A + \cot A)(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)}{(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)}$$

$$= (\operatorname{cosec} A + \cot A)$$

\therefore L.H.S = R.H.S Proved

Q 34. सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{\sin \theta - 2\sin^3 \theta}{2\cos^3 \theta - \cos \theta} = \tan \theta$$

Ans:- L.H.S

$$\frac{\sin \theta - 2\sin^3 \theta}{2\cos^3 \theta - \cos \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta (1 - 2\sin^2 \theta)}{\cos \theta (2\cos^2 \theta - 1)}$$

$$= \frac{\sin \theta \{1 - 2(1 - \cos^2 \theta)\}}{\cos \theta (2\cos^2 \theta - 1)} \quad (\because \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta)$$

$$= \frac{\sin \theta (1 - 2 + 2\cos^2 \theta)}{\cos \theta (2\cos^2 \theta - 1)}$$

$$= \frac{\sin \theta (2\cos^2 \theta - 1)}{\cos \theta (2\cos^2 \theta - 1)}$$

$$= \tan \theta$$

\therefore L.H.S = R.H.S Proved

Q 35. सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$$

Ans:- L.H.S

$$\frac{\cot A - \cos A}{\cot A + \cos A}$$

$$= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \cos A}{\frac{\cos A}{\sin A} + \cos A} \quad \left[\because \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \right]$$

$$= \frac{\cos A \left(\frac{1}{\sin A} - 1 \right)}{\cos A \left(\frac{1}{\sin A} + 1 \right)} = \frac{\operatorname{cosec} A - 1}{\operatorname{cosec} A + 1}$$

\therefore L.H.S = R.H.S Proved

Q 36. सिद्ध कीजिए कि: $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

Ans:-

L.H.S

$$(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$$

$$= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2 \times \sin A \operatorname{cosec} A$$

$$+ \cos^2 A + \sec^2 A + 2 \times \cos A \sec A$$

$$= (\sin^2 A + \cos^2 A) + 2 \times 1 + 2 \times 1$$

$$+ 1 + \cot^2 A + 1 + \tan^2 A$$

$$= 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

$$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

\therefore L.H.S = R.H.S Proved

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए:

- Q 1. धरती पर एक मीनार ऊर्ध्वाधर खड़ी है। धरती के एक बिंदु जो मीनार के पाद- बिंदु से 15 m दूर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है, तो मीनार की ऊँचाई है:
- (a) 20 m (b) $15\sqrt{3}$ m
(c) 20cm (d) $20\sqrt{3}$ m
- Q 2. ΔPQR में जिसका कोण Q समकोण है, $PQ = 3$ cm और $PR = 6$ cm हो, तो $\angle QPR$ का मान होगा:
- (a) 30° (b) 45°
(c) 60° (d) 90°
- Q 3. 6 m ऊँचे एक खंभे की छाया भूमि पर $2\sqrt{3}$ m लंबी है। उस समय सूर्य का उन्नयन कोण है:
- (a) 0° (b) 30°
(c) 60° (d) 90°
- Q 4. एक पेड़ की छाया उसके लंबाई के बराबर है। उस समय सूर्य का उन्नयन कोण है:
- (a) 0° (b) 45°
(c) 90° (d) 60°
- Q 5. एक मीनार की छाया की लंबाई बढ़ रही है तो सूर्य का उन्नयन कोण:
- (a) बढ़ेगा (b) घटेगा
(c) अपरिवर्तित रहेगा (d) इनमें से कोई नहीं

वस्तुनिष्ठ प्रश्न का हल

1 - (b) 2 - (c) 3 - (c) 4 - (b) 5 - (b)

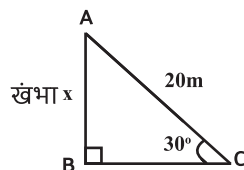
(लघु उत्तरीय प्रश्न)

- Q 6. सर्कस का एक कामगार 20 m लंबी एक डोरी पर चल रहा है जो अच्छी तरह से तनी हुई है तथा एक खंभे के शिखर से बंधी हुई है। यदि डोरी का भूमि के स्तर से बना कोण 30° हो, तो खंभे की ऊँचाई ज्ञात करें।

Ans:- माना की खंभे की ऊँचाई x m है।

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ में,} \\ \therefore \sin 30^\circ &= \frac{AB}{AC} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &= \frac{x}{20} \\ \Rightarrow 2x &= 20 \\ \Rightarrow x &= \frac{20}{2} = 10\text{m} \end{aligned}$$

अतः खंभे की ऊँचाई 10 m है।

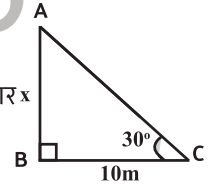


- Q 7. धरती पर एक मीनार ऊर्ध्वाधर खड़ी है। मीनार के पाद बिंदु से 10 m दूर स्थित बिंदु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात करें।

Ans:- माना की मीनार की ऊँचाई x m है।

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ में,} \\ \therefore \tan 30^\circ &= \frac{AB}{BC} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} &= \frac{x}{10} \\ \Rightarrow \sqrt{3}x &= 10 \\ \Rightarrow x &= \frac{10}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ \therefore x &= \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ m} \end{aligned}$$

अतः मीनार की ऊँचाई $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ m है।

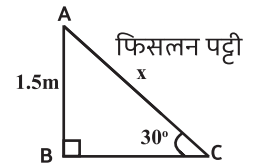


- Q 8. एक ठेकेदार बच्चों को खेलने के लिए 1.5m ऊँचा एक फिसलन पट्टी लगाता है, जो भूमि के साथ 30° के कोण पर झुका हुआ है। फिसलन पट्टी की लंबाई ज्ञात करें।

Ans:- माना कि फिसलन पट्टी की लंबाई x m है।

$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ में,} \\ \therefore \sin 30^\circ &= \frac{AB}{AC} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} &= \frac{1.5}{x} \\ \Rightarrow x &= 2 \times 1.5 = 3\text{m}. \end{aligned}$$

अतः फिसलन पट्टी की लंबाई 3 m है।

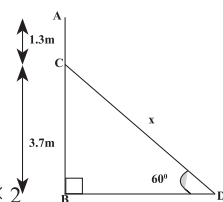


- Q 9. एक बिजली मिस्त्री को एक 5m ऊँचे खंभे पर आ गई खराबी की मरम्मत करनी है। मरम्मत का काम करने के लिए उसे खंभे के शिखर से 1.3m नीचे एक बिंदु तक वह पहुँचना चाहती है। यहाँ तक पहुँचने के लिए प्रयुक्त सीढ़ी की लंबाई कितनी होनी चाहिए जिससे कि क्षैतिज से 60° के कोण से झुकाने पर वह अपेक्षित स्थिति तक पहुँच जाए?

Ans:- माना की सीढ़ी की लंबाई x m है।

$$\begin{aligned} \Delta CBD \text{ में,} \\ \therefore \sin 60^\circ &= \frac{BC}{CD} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{3.7}{CD} \\ \Rightarrow \sqrt{3} \times CD &= 3.7 \times 2 \\ \Rightarrow CD &= \frac{7.4 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ \Rightarrow CD &= \frac{7.4 \times \sqrt{3}}{3} \text{ m} = 4.28 \text{ m (लगभग)} \end{aligned}$$

अतः सीढ़ी की लंबाई 4.28 m (लगभग) है।



- Q 10. 1.5m लंबा एक प्रेक्षक एक चिमनी से 28.5 m की दूरी पर है। उसकी आँखों से चिमनी के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। चिमनी की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Ans:-

माना,

AB = चिमनी

$\triangle AED$ में,

$$\therefore \tan 45^\circ = \frac{AE}{ED}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{AE}{28.5}$$

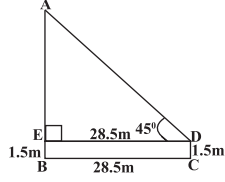
$$\Rightarrow AE = 28.5 \text{ m}$$

$$\therefore AB = AE + BE$$

$$\therefore AB = 28.5 + 1.5$$

$$\therefore AB = 30 \text{ m}$$

अतः चिमनी की ऊँचाई (AB) = 30 m है।



- Q 11. भूमि के एक बिंदु से, जो मीनार के पाद-बिंदु से 30m की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Ans:-

माना की मीनार की ऊँचाई x m है।

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$$

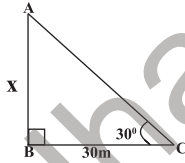
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{30}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x = 30$$

$$\Rightarrow x = \frac{30}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore x = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः मीनार की ऊँचाई $10\sqrt{3}$ m है।



- Q 12. भूमि से 60 m की ऊँचाई पर एक पतंग उड़ रही है। पतंग में लगी डोरी को अस्थायी रूप से भूमि के एक बिंदु से बांध दिया गया है। भूमि के साथ डोरी का झुकाव 60° है। यह मानकर कि डोरी में कोई ढील नहीं है, डोरी की लंबाई ज्ञात कीजिए।

Ans:-

माना की डोरी की लंबाई x m है।

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{60}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{60}{x}$$

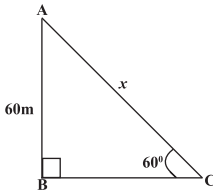
$$\Rightarrow \sqrt{3}x = 60 \times 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{60 \times 2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{60 \times 2 \times \sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore x = 40\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः डोरी की लंबाई $40\sqrt{3}$ m है।



- Q 13. आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन को छूने लगता है और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पाद बिंदु की दूरी जहाँ पेड़ का शिखर जमीन को छूता है, 8 मीटर है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Ans:-

$\triangle ABC$ में,

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{8}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \times AB = 8$$

$$\therefore AB = \frac{8}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

पुनः,

$$\therefore \cos 30^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{AC}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \times AC = 16$$

$$\therefore AC = \frac{16}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

पेड़ की ऊँचाई = AB + AC

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}}$$

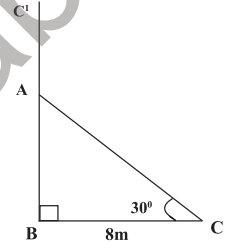
$$= \frac{8 + 16}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{24\sqrt{3}}{3}$$

$$= 8\sqrt{3}$$

अतः पेड़ की ऊँचाई $8\sqrt{3}$ m है।



- Q 14. 7m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Ans:-

माना की केबल टॉवर (EC) की ऊँचाई h m है।

$\triangle ABC$ में,

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{7}{BC}$$

$$\Rightarrow BC = 7 \text{ m}$$

$$\therefore BC = AD = 7 \text{ m}$$

पुनः,

$\triangle ADE$ में,

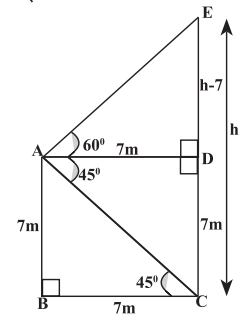
$$\tan 60^\circ = \frac{ED}{AD}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h-7}{7}$$

$$\Rightarrow h-7 = 7\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h = 7\sqrt{3} + 7 = 7(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$$

अतः केबल टॉवर की ऊँचाई $7(\sqrt{3} + 1)$ m है।



Q 15. एक मीनार के पाद-बिंदु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद बिंदु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार की ऊँचाई 50 मीटर हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Ans:- माना की भवन (CD) की ऊँचाई h m है तथा AB एक 50 m ऊँचा मीनार है।

$\triangle ABC$ में,

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{50}{BC}$$

$$\therefore BC = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

पुनः,

$\triangle DCB$ में,

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{h}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\frac{50}{\sqrt{3}}}$$

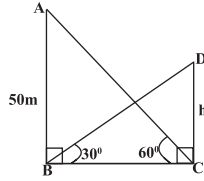
$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h \times \sqrt{3}}{50}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \times \sqrt{3} h = 50$$

$$\Rightarrow 3h = 50$$

$$\Rightarrow h = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \text{ m}$$

अतः भवन की ऊँचाई $16\frac{2}{3}$ m है।



Q 16. एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थिति में 40m अधिक लंबी हो जाती है जबकि सूर्य का उन्नतांश (altitude) 60° से घटकर 30° हो जाता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Ans:- माना की मीनार (AB) की ऊँचाई h m है।

$\triangle ABC$ में,

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{3} x$$

..... (i)

$\triangle ABD$ में,

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{h}{x+40}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} x}{x+40} \quad (\text{समीकरण (i) से})$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} x \times \sqrt{3} = x + 40$$

$$\Rightarrow 3x - x = 40$$

$$\Rightarrow 2x = 40$$

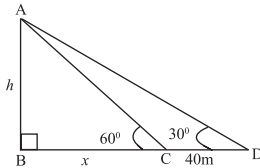
$$\Rightarrow x = \frac{40}{2} = 20 \text{ m}$$

x का मान समी० (i) में रखने पर,

$$h = \sqrt{3} \times 20$$

$$= 20\sqrt{3} \text{ m}$$

अतः मीनार की ऊँचाई $20\sqrt{3}$ m है।



Q 17. मीनार के आधार से और एक सरल रेखा में 4m और 9m की दूरी पर स्थित दो बिंदुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण हैं। सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6m है।

Ans:- माना की मीनार (AB) की ऊँचाई h m है।

$\triangle ABC$ में,

$$\tan \theta = \frac{h}{4} \quad \dots\dots\dots (i)$$

$\triangle ABD$ में,

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{h}{9}$$

$$\Rightarrow \cot \theta = \frac{h}{9} \quad \dots\dots (ii) \quad [\because \tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta]$$

समी. (i) तथा समी. (ii) को गुणा करने पर,

$$\therefore \tan \theta \times \cot \theta = \frac{h}{4} \times \frac{h}{9}$$

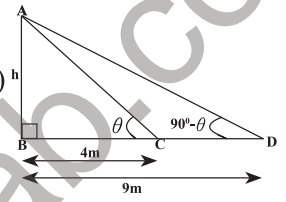
$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{h^2}{36} \quad [\because \tan \theta \times \cot \theta = 1]$$

$$\Rightarrow h^2 = 36$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{36}$$

$$\therefore h = 6 \text{ m}$$

अतः मीनार की ऊँचाई 6m है। Proved.



Q 18. भूमि के एक बिन्दु से 20m. ऊँचे भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

Ans:-

माना BC एक 20 m ऊँचा भवन है तथा AB उसके ऊपर लगी संचार मीनार है।

$\triangle BCD$

$$\therefore \tan 45^\circ = \frac{BC}{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{20}{CD}$$

$$\Rightarrow CD = 20 \text{ m}$$

$\triangle ACD$

$$\therefore \tan 60^\circ = \frac{AC}{CD}$$

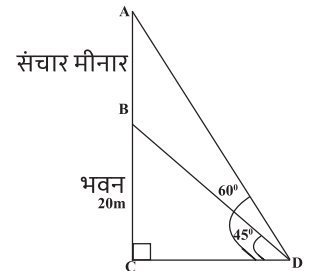
$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB + 20}{20}$$

$$\Rightarrow AB + 20 = 20\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AB = 20\sqrt{3} - 20$$

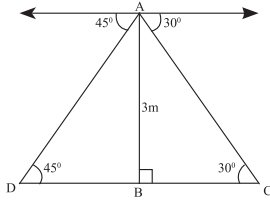
$$\therefore AB = 20(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$$

अतः मीनार की ऊँचाई $20(\sqrt{3} - 1)$ m है।



Q 19. एक नदी के पुल के एक बिन्दु से नदी के सम्मुख किनारों के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° है। यदि पुल किनारों से 3m की ऊँचाई पर हो, तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

Ans:- माना की CD नदी की चौड़ाई है, तथा AB 3 m ऊँचा पुल है।



ΔABC में
 $\therefore \tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$
 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{BC}$
 $\Rightarrow BC = 3\sqrt{3} \text{ m}$

पुनः

ΔABD में
 $\therefore \tan 45^\circ = \frac{AB}{BD}$
 $\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{3}{BD}$
 $\Rightarrow BD = 3 \text{ m}$

$CD = BC + BD = 3\sqrt{3} + 3 = 3(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$

अतः नदी की चौड़ाई $3(\sqrt{3} + 1) \text{ m}$ है।

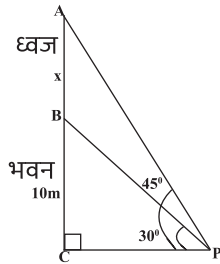
Q 20. भूमि के एक बिन्दु P से 10 मी. ऊँचे भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। भवन के शिखर पर एक ध्वज को लहराया गया है और बिन्दु P से ध्वज के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। ध्वज की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Ans:- माना की ध्वज (AB) की लम्बाई $x \text{ m}$ है।

भवन (BC) = 10 m

ΔBCP में

$\therefore \tan 30^\circ = \frac{BC}{CP}$
 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{CP}$
 $\therefore CP = 10\sqrt{3} \text{ m}$



पुनः

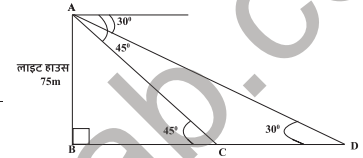
ΔACP में

$\therefore \tan 45^\circ = \frac{AC}{CP}$
 $\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{x + 10}{10\sqrt{3}}$
 $\Rightarrow x + 10 = 10\sqrt{3}$
 $\Rightarrow x = 10\sqrt{3} - 10$
 $\therefore x = 10(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$

अतः ध्वज की लम्बाई $10(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$ है।

Q 21. समुद्र तल से 75 m ऊँची लाइट हाउस के शिखर से देखने पर जो समुद्री जहाजों के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° हैं। यदि लाइट हाउस के एक ही ओर एक जहाज दूसरे जहाज के ठीक पीछे हो तो दोनों जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

Ans:- माना AB एक लाइट हाउस है तथा C और D दो जहाज हैं।



ΔABC में
 $\therefore \tan 45^\circ = \frac{AB}{BC}$
 $\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{75}{BC}$
 $\Rightarrow BC = 75 \text{ m}$

ΔABD में
 $\therefore \tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$
 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{75}{BD}$
 $\Rightarrow BD = 75\sqrt{3} \text{ m}$

जहाजों के बीच की दूरी (CD) = $BD - BC$
 $= 75\sqrt{3} - 75$
 $= 75(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$.

अतः जहाजों के बीच की दूरी $75(\sqrt{3} - 1) \text{ m}$ है।

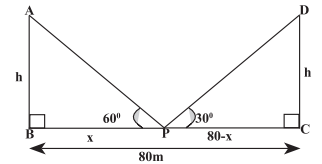
Q 22. एक 80m चौड़ी सड़क के दोनों ओर आमने-सामने समान ऊँचाई वाले दो खंभे लगे हुए हैं। इन दोनों खंभों के बीच सड़क के एक बिन्दु से खंभों के शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 60° और 30° है। खंभों की ऊँचाई और खंभों से बिन्दु की दूरी ज्ञात कीजिए।

Ans:- माना AB तथा CD दो सामान ऊँचाई के खम्भे हैं तथा BC 80 m चौड़ी सड़क है।

यहाँ,

$AB = CD = h \text{ m}$

$BP = x \text{ m}, PC = (80 - x) \text{ m}$



अब,

ΔABP में

$\therefore \tan 60^\circ = \frac{h}{x}$
 $\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{x}$
 $\Rightarrow \sqrt{3} x \dots\dots\dots (i)$

पुनः

ΔDCP में

$\therefore \tan 30^\circ = \frac{h}{80 - x}$
 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} x}{80 - x}$
 $\Rightarrow \sqrt{3} x \times \sqrt{3} = 80 - x$
 $\Rightarrow 3x + x = 80$
 $\Rightarrow 4x = 80$
 $\Rightarrow x = \frac{80}{4} = 20 \text{ m}$

समीकरण (i) से

$h = \sqrt{3} x = \sqrt{3} \times 20$
 $\Rightarrow h = 20\sqrt{3} \text{ m}$

अतः खंभों की ऊँचाई $20\sqrt{3} \text{ m}$ है।

खंभों से बिंदु की दूरी 20 m तथा $(80 - 20) = 60 \text{ m}$ है।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए:

- एक बिन्दु P से, वृत्त की स्पर्श रेखा की लम्बाई 7 cm है और P की केन्द्र से दूरी 25 cm है, तो वृत्त की त्रिज्या क्या है?
 (a) 12cm (b) 24cm
 (c) 13cm (d) 18cm
- एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हो सकती है?
 (a) अनंत (b) दो
 (c) एक (d) इनमें से कोई नहीं
- यदि TP और TQ केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं कि $\angle POQ=120^\circ$, तो $\angle PTQ$ बराबर है:
 (a) 60° (b) 70°
 (c) 80° (d) 90°
- 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिंदु P पर स्पर्श रेखा PQ केंद्र O से जाने वाली एक रेखा में बिंदु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $OQ = 12$ सेमी। PQ की लंबाई है:
 (a) 12 सेमी. (b) 13 सेमी.
 (c) 8.5 सेमी. (d) $\sqrt{119}$ सेमी.
- यदि TP और TQ केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार है कि $\angle POQ=110^\circ$, तो $\angle PTQ$ बराबर है:
 (a) 60° (b) 70°
 (c) 80° (d) 90°
- 8 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिंदु P पर स्पर्श रेखा PQ केंद्र O से जाने वाली एक रेखा में बिंदु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $OQ = 15$ सेमी। PQ की लंबाई है:
 (a) 10 सेमी. (b) 15 सेमी.
 (c) $\sqrt{161}$ सेमी. (d) $\sqrt{300}$ सेमी.
- यदि TP और TQ केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार है कि $\angle PTQ= 50^\circ$ तो $\angle POQ$ बराबर है?
 (a) 120° (b) 130°
 (c) 80° (d) 90°
- वृत्त के एक ही बिन्दु से गुजरने वाली रेखा को क्या कहते हैं।
 (a) छेदक रेखा (b) स्पर्श रेखा

- (c) जीवा (d) व्यास

- 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PQ केंद्र O से जाने वाली एक रेखा से बिन्दु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $OQ= 13$ सेमी है तो PQ का लंबाई निम्न में से क्या है?
 (a) 10 सेमी. (b) 12 सेमी.
 (c) 15 सेमी. (d) 17 सेमी.
- एक वृत्त के बिंदु P पर स्पर्श रेखा PQ केंद्र O से जाने वाली एक रेखा के बिंदु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $OQ=8$ सेमी। यदि $PQ=6$ सेमी हो, तो वृत्त की त्रिज्या है:
 (a) 10 सेमी. (b) $\sqrt{28}$ सेमी.
 (c) 18.5 सेमी. (d) $\sqrt{89}$ सेमी.
- यदि TP और TQ केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार है कि $\angle POT= 50^\circ$, तो $\angle PTQ$ बराबर है
 (a) 60° (b) 70°
 (c) 80° (d) 90°

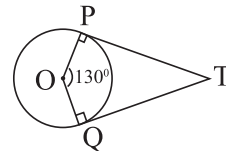
वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के उत्तर :-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
b	a	a	d	b	c	b	b	b	b	c

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

- किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उसे कितने बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है?
 हल: एक।
- वृत्त की छेदक रेखा उसे कितने बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करती है?
 हल: दो।
- एक वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएं हो सकती हैं?
 हल: अनंत।
- दिए गए आकृति में $\angle POQ = 130^\circ$ हो तो $\angle PTQ$ का मान ज्ञात करें।

हल:



$$\begin{aligned} \therefore \angle P + \angle PTQ + \angle Q + \angle POQ &= 360^\circ \\ \Rightarrow 90^\circ + 90^\circ + \angle PTQ + 130^\circ &= 360^\circ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 310^\circ + \angle PTQ = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \angle PTQ = 360^\circ - 310^\circ$$

$$\therefore \angle PTQ = 50^\circ$$

16. वृत्त तथा उसकी स्पर्श रेखा के उभयनिष्ठ बिंदु को किस नाम से जाना जाता है।

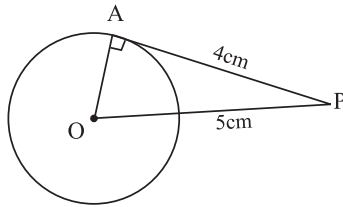
हल: स्पर्श बिंदु।

17. किसी वृत्त की अधिकतम कितनी समांतर स्पर्श रेखाएं हो सकती हैं।

हल: दो।

18. एक बिन्दु P से, जो एक वृत्त के केन्द्र से 5cm की दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल:



दिया गया है:- PA = 4cm

$$OP = 5\text{cm}$$

हम जानते हैं कि स्पर्श बिंदु पर खींची गई त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब होती है।

$$\therefore \angle OAP = 90^\circ$$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow OA^2 + PA^2 = OP^2$$

$$\Rightarrow OA^2 + (4)^2 = (5)^2$$

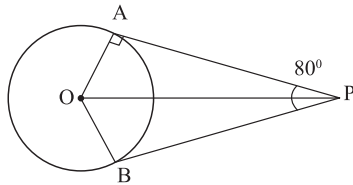
$$\Rightarrow OA^2 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow OA^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\therefore OA = \sqrt{9} = 3\text{ cm.}$$

19. यदि एक बिंदु P से O केंद्र वाले किसी वृत्त पर PA और PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर झुकी हों, तो $\angle POA$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:



दिया गया है $\angle APB = 80^\circ$

$$\Rightarrow \angle APO = \angle BPO = 40^\circ$$

$$\angle OAP = 90^\circ \text{ (त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लंब होती है।)}$$

$\triangle OAP$ में,

$$\angle POA + \angle OAP + \angle APO = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle POA + 90^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle POA + 130^\circ = 180^\circ$$

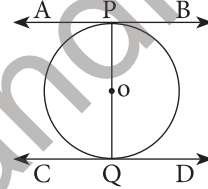
$$\Rightarrow \angle POA = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

$$\therefore \angle POA = 50^\circ$$

लघु उत्तरीय प्रश्न

20. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।

हल:



दिया है:- O केन्द्र वाले वृत्त में, AB और CD स्पर्श रेखाएँ व्यास PQ के सिरों पर खींचे गए हैं।

सिद्ध करना है :- $AB \parallel CD$

प्रमाण:-

हम जानते हैं कि वृत्त के स्पर्श बिंदु से होकर स्पर्श रेखा पर त्रिज्या लंब होती है।

$$\therefore \angle OQD = \angle PQD = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle OPB = \angle QPB = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle PQD + \angle QPB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle PQD + \angle QPB = 180^\circ$$

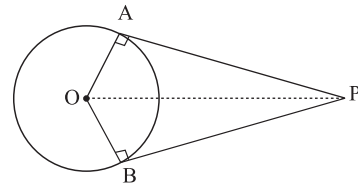
\therefore एक ही ओर के अंतः कोण सम्पूरक हैं।

$$\therefore AB \parallel CD$$

Proved.

21. सिद्ध करें की वृत्त के बाह्य बिन्दुओं से वृत्त पर खींची गयी स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं।

हल:



दिया गया है:- PA और PB एक वृत्त की दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

सिद्ध करना है :- PA = PB

रचना:- O-A, O-B तथा O-P को मिलाया।

प्रमाण:-

$\triangle OAP$ और $\triangle OBP$ में

OP = OP (उभयनिष्ठ भुजा)

OA = OB (वृत्त की त्रिज्याएँ)

$\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ (स्पर्श बिंदु पर खींची गई त्रिज्या उस पर लंब होती है।)

RHS सर्वांगसमता की कसौटी से,

$$\triangle OAP \cong \triangle OBP$$

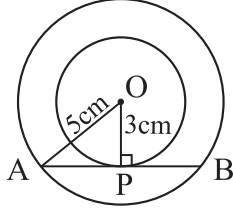
$$\therefore AP = BP \quad (\text{CPCT से})$$

$$\therefore PA = PB$$

Proved.

22. दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5cm तथा 3cm हैं। बड़े वृत्त की उस जीवा की लंबाई क्या होगी जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो?

हल:



दिया गया है कि $OA = 5\text{cm}$ (बड़े वृत्त की त्रिज्या)

$OP = 3\text{cm}$ (छोटे वृत्त की त्रिज्या)

हम जानते हैं कि वृत्त के स्पर्श बिंदु से होकर स्पर्श रेखा पर त्रिज्या लंब होती है।

$$\therefore \angle OPA = 90^\circ$$

$\triangle AOP$ में,

$$\therefore OP^2 + PA^2 = OA^2 \quad (\text{पाइथागोरस प्रमेय से})$$

$$\Rightarrow (3)^2 + PA^2 = (5)^2$$

$$\Rightarrow 9 + PA^2 = 25$$

$$\Rightarrow PA^2 = 25 - 9 = 16$$

$$\Rightarrow PA = \sqrt{16} = 4\text{cm}$$

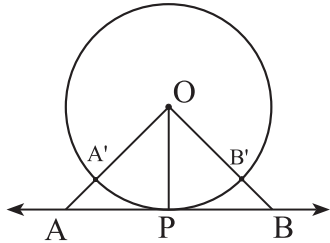
हम जानते हैं कि केन्द्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

$$\therefore \text{बड़े वृत्त के जीवा की लंबाई } (AB) = 4 \times 2 = 8\text{cm}$$

अतः बड़े वृत्त के जीवा की लंबाई 8 cm है। Ans.

23. सिद्ध करें कि वृत्त के स्पर्श बिंदु पर खींची गई त्रिज्या उस पर लंब होती है।

हल:



दिया है :- 'O' केन्द्र वाले वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा AB दी गई है।

सिद्ध करना है:- $OP \perp AB$.

रचना:- O से A और B को मिलाया।

प्रमाण:-

$$OP = OA' = OB' \quad (\text{वृत्त की त्रिज्याएँ})$$

स्पष्ट रूप से, $OB > OB' \Rightarrow OB > OP$

$$OA > OA' \Rightarrow OA > OP$$

\therefore बिन्दु P के अतिरिक्त AB के अन्य बिंदुओं से O की दूरी OP से अधिक है।

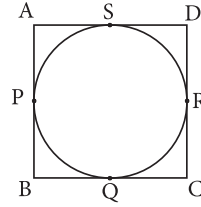
\therefore O से AB की न्यूनतम दूरी OP है।

हम जानते हैं कि किसी बिन्दु से दिए गए रेखा पर खिंची गई न्यूनतम दूरी की रेखा उस पर लम्ब होती है।

$$\therefore OP \perp AB$$

Proved.

24. एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज ABCD खींचा गया है (आकृति देखिए) सिद्ध कीजिए कि $AB + CD = AD + BC$



हल: हम जानते हैं कि वृत्त के बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाई बराबर होती है।

$$\therefore AS = AP \dots\dots\dots(i) \quad (\text{बिन्दु A से खिंची गई स्पर्श रेखा})$$

$$DS = DR \dots\dots\dots(ii) \quad (\text{बिन्दु D से खिंची गई स्पर्श रेखा})$$

$$BQ = BP \dots\dots\dots(iii) \quad (\text{बिन्दु B से खिंची गई स्पर्श रेखा})$$

$$CQ = CR \dots\dots\dots(iv) \quad (\text{बिन्दु C से खिंची गई स्पर्श रेखा})$$

समी० (i), समी० (ii), समी० (iii) तथा समी० (iv) को जोड़ने पर

$$AS + DS + BQ + CQ = AP + DR + BP + CR$$

$$AS + DS + BQ + CQ = AP + BP + DR + CR$$

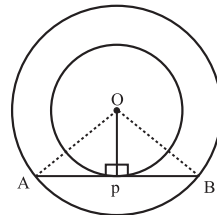
$$\Rightarrow AD + BC = AB + CD$$

$$\therefore AB + CD = AD + BC$$

Proved.

25. सिद्ध कीजिए कि दो संकेन्द्रीय वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती है, स्पर्श बिन्दु पर समद्विभाजित होती है।

हल:



दिया है:- बड़े वृत्त की जीवा AB छोटे वृत्त के बिन्दु P

पर स्पर्श रेखा है।

सिद्ध करना है:- $AP = BP$

रचना:- O से A और O से B को मिलाया।

प्रमाण:-

हम जानते हैं कि स्पर्श रेखा पर खिंची गई त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब होती है।

$$\therefore \angle OPA = \angle OPB = 90^\circ$$

$$OP = OP \text{ (उभयनिष्ठ भुजा)}$$

$$OA = OB \text{ (वृत्त की त्रिज्याएँ)}$$

RHS सर्वांगसमता की कसौटी से,

$$\triangle OPA \cong \triangle OPB$$

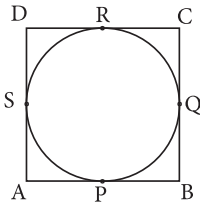
$$AP = BP \quad (\text{CPCT से})$$

$$\therefore AP = BP$$

Proved.

26. सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

हल:



दिया है:- वृत्त के परिगत एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचा गया है।

सिद्ध करना है:- ABCD एक समचतुर्भुज है।

प्रमाण:-

वृत्त के बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खिंची गई स्पर्श रेखा की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।

$$\therefore AP = AS \dots\dots\dots(i) \quad (\text{बिन्दु A से खिंची गई स्पर्श रेखा})$$

$$\therefore BP = BQ \dots\dots\dots(ii) \quad (\text{बिन्दु B से खिंची गई स्पर्श रेखा})$$

$$\therefore CR = CQ \dots\dots\dots(iii) \quad (\text{बिन्दु C से खिंची गई स्पर्श रेखा})$$

$$\therefore DR = DS \dots\dots\dots(iv) \quad (\text{बिन्दु D से खिंची गई स्पर्श रेखा})$$

समी० (i), समी० (ii), समी० (iii) तथा समी० (iv) को जोड़ने पर

$$\Rightarrow \underline{AP + BP + CR + DR} = AS + BQ + CQ + DS$$

$$\Rightarrow AB + CD = \underline{AS + DS} + \underline{BQ + CQ}$$

$$\Rightarrow AB + CD = AD + BC \quad \dots\dots\dots(5)$$

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

$$\therefore AB = CD \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$\therefore AD = BC \quad \dots\dots\dots(7)$$

CD तथा BC का मान समीकरण (5) में रखने पर,

$$\Rightarrow AB + AB = AD + AD$$

$$\Rightarrow 2AB = 2AD$$

$$\Rightarrow AB = AD \quad \dots\dots\dots(8)$$

समी० 6, समी० 7 तथा समी० 8 से

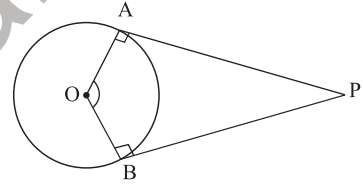
$$AB = BC = CD = AD$$

\therefore ABCD एक समचतुर्भुज है।

Proved.

27. सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिन्दु से किसी वृत्त पर खिंची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है।

हल:



दिया है :- 'O' केन्द्र वाले वृत्त में PA और PB दो स्पर्श रेखाएँ पर खिंची गई हैं।

सिद्ध करना है:- $\angle APB + \angle AOB = 180^\circ$

प्रमाण:-

हम जानते हैं कि स्पर्श रेखा पर खिंची गई त्रिज्या स्पर्श रेखा पर लंब होती है।

$$\therefore \angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$$

चतुर्भुज के सभी अंतः कोणों का योग 360° होता है।

$$\therefore \angle AOB + \angle APB + \angle OAP + \angle OBP = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOB + \angle APB + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

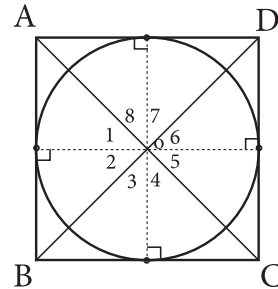
$$\Rightarrow \angle AOB + \angle APB = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore \angle AOB + \angle APB = 180^\circ$$

Proved.

28. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के परिगत बनी चतुर्भुज की आमने-सामने की भुजाएँ केंद्र पर संपूरक कोण अंतरित करती हैं।

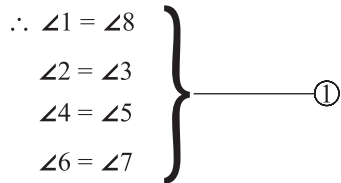
हल:



सिद्ध करना है कि $\angle AOB + \angle COD = 180^\circ$

और $\angle AOD + \angle BOC = 180^\circ$

बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखा वृत्त के केन्द्र पर समान कोण बनाती है।



किसी बिन्दु पर कोणों का कुल योग = 360°

$$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 6 + \angle 1 = 360^\circ$$

[समी(i)से]

$$\Rightarrow 2\angle 1 + 2\angle 2 + 2\angle 5 + 2\angle 6 = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\angle 1 + \angle 2) + 2(\angle 5 + \angle 6) = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 2\angle AOB + 2\angle COD = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOB + \angle COD = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AOB + \angle COD = 180^\circ \dots\dots\dots(2)$$

और,

$$\Rightarrow \angle AOB + \angle COD + \angle AOD + \angle BOC = 360^\circ \text{ [पूर्ण कोण]}$$

$$\Rightarrow 180^\circ + \angle AOD + \angle BOC = 360^\circ \text{ [समीकरण 2 से]}$$

$$\Rightarrow \angle AOD + \angle BOC = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

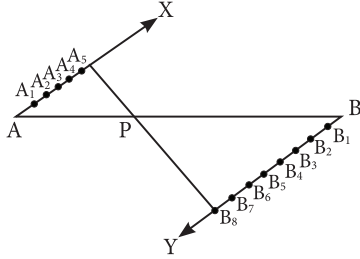
$$\therefore \angle AOD + \angle BOC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle AOB + \angle COD = 180^\circ \text{ Proved.}$$

$$\therefore \angle AOD + \angle BOC = 180^\circ$$

1. 8.5cm लंबा एक रेखाखंड खींचिए और इसे 5:8 अनुपात में विभाजित कीजिए।

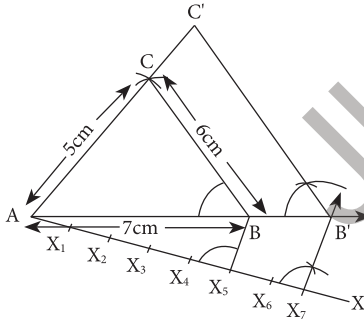
हल:



P, AB को 5:8 अनुपात में विभाजित करता है।

2. 5cm, 6cm और 7cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिये हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की 7/5 गुनी हो।

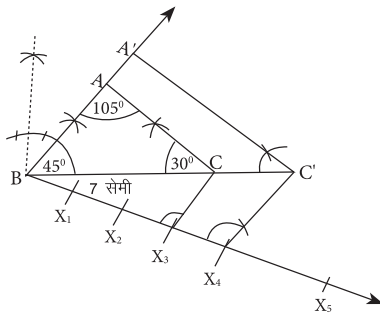
हल:



अतः अभीष्ट $\Delta AB'C'$ है।

3. एक त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जिसमें भुजा BC = 7cm, $\angle B = 45^\circ$ और $\angle A = 105^\circ$ हो, फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ त्रिभुज ABC की संगत भुजाओं की 4/3 गुनी हो।

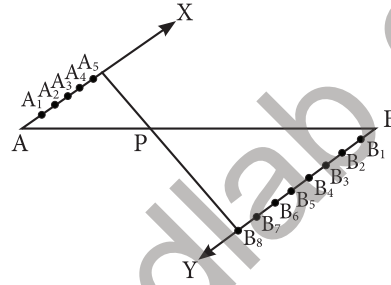
हल:



अतः अभीष्ट $\Delta A'BC'$ है।

4. 7.6cm लंबा एक रेखाखंड खींचिए और इसे 5:8 अनुपात में विभाजित कीजिए।

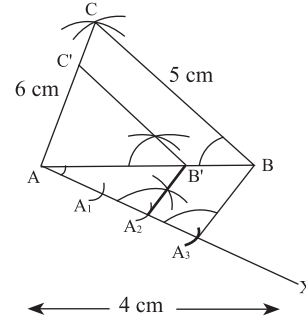
हल:



P, AB को 5:8 अनुपात में विभाजित करता है।

5. 4cm, 5cm और 6cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिये हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की 2/3 गुनी हो।

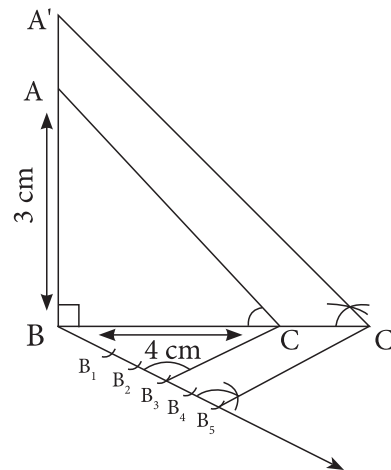
हल:



अतः अभीष्ट $\Delta AB'C'$ है।

6. एक समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाये (कर्ण के अतिरिक्त), 4cm तथा 3cm लंबाई की हों, फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाये दिये हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की 5/3 गुनी हो।

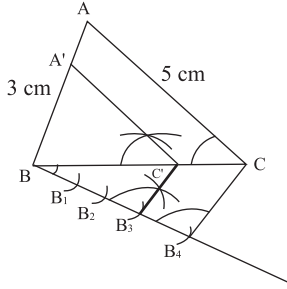
हल:



अतः अभीष्ट $\Delta A'BC'$ है।

7. 3cm, 4cm और 5cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ दिए हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $3/4$ गुनी हो।

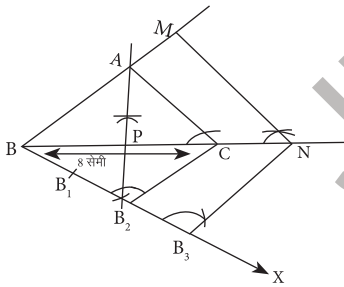
हल:



अतः अभीष्ट $\Delta A'BC'$ है।

8. आधार 8 सेमी तथा ऊँचाई 4 सेमी के एक समद्विबाहु की रचना कीजिए और एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ इस समद्विबाहु त्रिभुज की संगत भुजाओं की $1\frac{1}{2}$ गुनी हों।

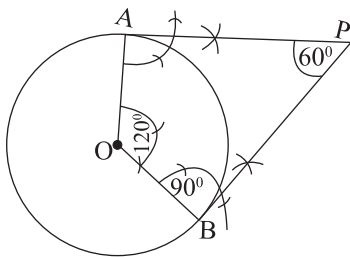
हल:



अतः अभीष्ट ΔMBN है।

9. 5cm त्रिज्या के एक वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए जो परस्पर 60° के कोण पर झुकी हो।

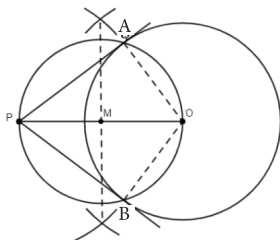
हल:



PA और PB अभीष्ट स्पर्श रेखा का युग्म है।

10. 6cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। केंद्र से 10cm दूर स्थित एक बिंदु से स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिए।

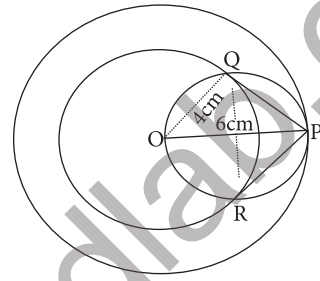
हल:



PA और PB अभीष्ट स्पष्ट रेखा का युग्म है।

11. 4cm त्रिज्या के एक वृत्त पर 6cm त्रिज्या के एक सकेन्द्रीय वृत्त के किसी बिंदु से स्पर्श रेखा की रचना कीजिए।

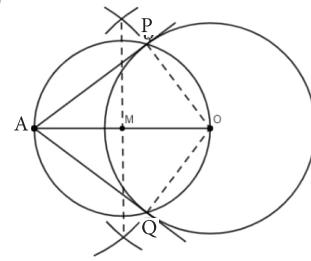
हल:



PQ और PR अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

12. 4cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। केंद्र में 6cm दूर स्थित एक बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना करें।

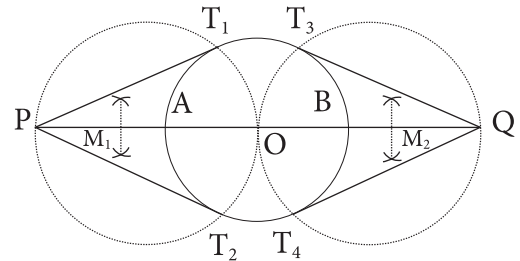
हल:



AP और AQ अभीष्ट स्पर्श रेखा का युग्म है।

13. 3cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसके किसी बढ़ाए गए व्यास पर केंद्र से 7cm की दूरी पर स्थित दो बिंदु P और Q लीजिए। इन दोनों बिंदुओं से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

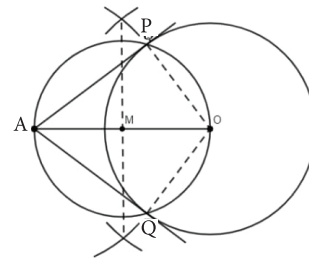
हल:



PT_1 और PT_2 एवं QT_3 और QT_4 अभीष्ट स्पर्श रेखाओं का युग्म है।

14. 4cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। केंद्र में 7cm दूर स्थित एक बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना करें।

हल:



AP और AQ अभीष्ट स्पर्श रेखा का युग्म है।

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए:

- दो वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः 19 cm और 9 cm है। उस वृत्त की त्रिज्या क्या होगी जिसकी परिधि इन दोनों वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है?
 - 17 cm
 - 28 cm
 - 27 cm
 - 23 cm
- 21 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के चाप की लम्बाई क्या होगी जो केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करता है?
 - 21 cm
 - 15 cm
 - 22 cm
 - इनमें से कोई नहीं
- 60° केंद्रीय कोण और 14 cm त्रिज्या वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल है?
 - 102.6 cm²
 - 154.3 cm²
 - 212.3 cm²
 - 308.3 cm²
- त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसका कोण p° है:
 - $(p/180^\circ) \times 2\pi R$
 - $(p/180^\circ) \times \pi R^2$
 - $(p/360^\circ) \times 2\pi R$
 - $(p/720^\circ) \times 2\pi R^2$
- 120° केंद्रीय कोण और 21 cm त्रिज्या वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल है?
 - 462 cm²
 - 441 cm²
 - 512 cm²
 - 308 cm²
- 7 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के चाप की लम्बाई क्या होगी जो केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करता है?
 - 22 cm
 - $22/3$ cm
 - 44 cm
 - $44/3$ cm
- θ केंद्रीय कोण और त्रिज्या r वाले त्रिज्यखंड का परिमाण निम्न में से चुनें:
 - $(\theta/360^\circ) \times \pi r^2 + 2r$
 - $(\theta/360^\circ) \times 2\pi r + 2r$
 - $(\theta/360^\circ) \times 2\pi r^2 + 2r$
 - $(\theta/360^\circ) \times 2\pi r$
- 21 सेमी त्रिज्या वाली त्रिज्यखंड जिसका 60° केंद्रीय कोण है, का क्षेत्रफल का मान निम्न में से क्या है?
 - 155 सेमी²
 - 165 सेमी²
 - 231 सेमी²
 - 90 सेमी²
- 90° केंद्रीय कोण और 14 cm त्रिज्या वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल है?
 - 102 cm²
 - 154 cm²
 - 212 cm²
 - 308 cm²
- एक वृत्त के चतुर्थांश (quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 44 cm है।
 - 154 cm²
 - 77 cm²

- 77/2 cm²
 - 308 cm²
- यदि एक वृत्त का परिमाण और क्षेत्रफल संख्यात्मक रूप से बराबर है, तो उस वृत्त की त्रिज्या है:
 - 2 मात्रक
 - π मात्रक
 - 4 मात्रक
 - 7 मात्रक
 - एक घोड़ा 7 मीटर लंबे रस्सी से एक घास के मैदान में बंधा है। उस भाग का क्षेत्रफल क्या होगा जिसमें घोड़ा घास चर सकता है?
 - 154 m²
 - 54 m²
 - $154/7$ m²
 - 49 m²
 - 7 cm त्रिज्या वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल होगा:
 - 77 cm²
 - 154 cm²
 - 72 cm²
 - $77/2$ cm²
 - दो वृत्तों की त्रिज्या क्रमशः 8 cm और 6 cm है। उस वृत्त की त्रिज्या क्या होगी जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है?
 - 10 cm
 - 64 cm
 - 36 cm
 - 14 cm
 - 7 cm व्यास वाले वृत्त का क्षेत्रफल होगा:
 - 72 cm²
 - $77/2$ cm²
 - 154 cm²
 - 77 cm²

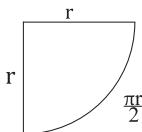
वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के उत्तर

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b	c	a	d	a	b	b	c	b	c	a	a	a	a	b

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

- व्यास d वाले वृत्त का परिमाण लिखिए।
हल: परिमाण = πd
- एक वृत्ताकार खेत पर 24 रु प्रति मीटर की दर से बाड़ लगाने का व्यय 5280 रुपए है। बाड़ की लम्बाई ज्ञात करें।
हल: बाड़ की लम्बाई = $\frac{5280}{24} = 220$ m Ans
- 14 cm त्रिज्या वाले अर्धवृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
हल: $r = 14$ cm
अर्धवृत्त का क्षेत्र = $\frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$
= 308 cm² Ans
- r त्रिज्या वाले वृत्त के चतुर्थांश का परिमाण लिखिए।
हल: त्रिज्या = r
चतुर्थांश का परिमाण = $\frac{\pi r}{2} + r + r$
= $\frac{\pi r}{2} + \frac{2r}{1}$

$$= \frac{\pi r + 4r}{2}$$

$$= \frac{r(\pi + 4)}{2} \text{ मात्रक Ans.}$$


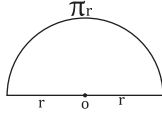
20. r त्रिज्या वाले वृत्त के अर्धवृत्त का परिमाण लिखिए।

हल : त्रिज्या = r

अर्धवृत्त का परिमाण = $\pi r + r + r$

$$= \pi r + 2r$$

$$= r(\pi + 2) \text{ मात्रक}$$



21. r त्रिज्या वाले वृत्त के अर्धवृत्त का क्षेत्रफल लिखिए।

हल : त्रिज्या = r

अर्धवृत्त का क्षेत्र = $\frac{1}{2} \pi r^2$ वर्ग मात्रक Ans

22. d व्यास वाले वृत्त के अर्धवृत्त का क्षेत्रफल लिखिए।

हल : व्यास = d

$$\text{त्रिज्या} = \frac{d}{2}$$

$$\text{अर्धवृत्त का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \pi r^2 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$= \frac{\pi d^2}{8} \text{ वर्ग मात्रक Ans.}$$

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

23. 6 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है।

हल : त्रिज्या (r) = 6cm, $\theta = 60^\circ$

$$\text{त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} = \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{6 \times 6 \times 60^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{132}{7} \text{ cm}^2 \text{ Ans}$$

24. एक वृत्त के चतुर्थांश (quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22 cm है।

हल : प्रश्न से,

वृत्त की परिधि = 22 cm

$$\Rightarrow 2\pi r = 22$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$$

$$\Rightarrow 2r = 7$$

$$\therefore r = \frac{7}{2} \text{ cm}$$

$$\text{चतुर्थांश का क्षेत्रफल} = \frac{1}{4} \pi r^2$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

$$= \frac{77}{8} \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

25. एक घड़ी की मिनट की सुई जिसकी लंबाई 14 cm है। इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : त्रिज्या (r) = 14 cm

\therefore मिनट की सुई द्वारा 60 मिनट में केंद्र पर बना कोण 360° है।

\therefore मिनट की सुई द्वारा 5 मिनट में केंद्र पर बना कोण $\frac{360^\circ}{60^\circ}$

\therefore मिनट की सुई द्वारा 5 मिनट में $6 \times 5 = 30^\circ$

$$\theta = 30^\circ$$

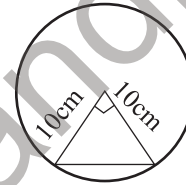
5 मिनट में मिनट की सुई द्वारा रचित क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{14 \times 14 \times 30^\circ}{360^\circ}$$

$$= \frac{154}{3} \text{ cm}^2 \text{ Ans}$$

26. 10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर एक समकोण अंतरित करती है। संगत लघु वृत्तखंड और संगत दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए।)

हल:-



त्रिज्या (r) = 10 cm

$$\theta = 90^\circ$$

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल = $\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$

$$= \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi \theta}{180^\circ} - \sin \theta \right)$$

$$= \frac{10 \times 10^2}{2} \left(\frac{3.14 \times 90^\circ}{180^\circ} - \sin 90^\circ \right)$$

$$= 50 \left(\frac{3.14}{2} - 1 \right)$$

$$= 50 (1.57 - 1)$$

$$= 50 \times 0.57$$

$$= 28.5 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

दीर्घ वृत्त खंड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्र - लघु वृत्तखंड का क्षेत्र

$$= \pi r^2 - 28.5$$

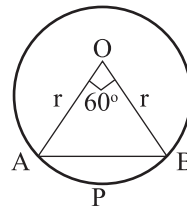
$$= 3.14 \times 100 - 28.5$$

$$= 314 - 28.5$$

$$= 285.5 \text{ cm}^2 \text{ Ans}$$

27. त्रिज्या 21 cm वाले वृत्त का एक चाप केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए: (i) चाप की लंबाई (ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल (iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल

हल :



त्रिज्या (r) = 21 cm

$$\theta = 60^\circ$$

i) चाप की लंबाई = $\frac{2\pi r \theta}{360^\circ}$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{21 \times 60}{360}$$

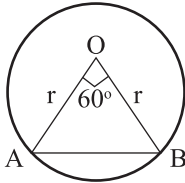
= 22 cm Ans

$$\begin{aligned} \text{ii) संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{21 \times 21 \times 60}{360} \\ &= 231 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii) संगत वृत्त का क्षेत्रफल} &= \text{त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल} - \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} \\ &= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \\ &= 231 - \frac{21 \times 21}{2} \times \sin 60^\circ \\ &= 231 - \frac{441}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \left(231 - \frac{441\sqrt{3}}{4} \right) \text{ cm}^2 \text{ Ans} \end{aligned}$$

28. 15 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती है। संगत लघु और दीर्घ वृत्तखंडों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi=3.14$ और $\sqrt{3}=1.73$ का प्रयोग कीजिए)

हल :



त्रिज्या (r) = 15 cm

$\theta = 60^\circ$

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - ΔAOB का क्षेत्रफल

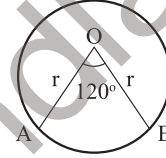
$$\begin{aligned} \text{लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360} - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \\ &= \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi \theta}{180} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{225}{2} \left(\frac{3.14 \times 60}{180} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{225}{2} \left(\frac{3.14}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{225}{2} \left(\frac{3.14}{3} - \frac{1.73}{2} \right) \\ &= \frac{225}{2} \left(\frac{6.28 - 5.19}{6} \right) \\ &= \frac{225}{2} \times \frac{1.09}{6} = \frac{245.25}{12} \\ &= 20.4375 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

दीर्घ वृत्त खंड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल - लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \pi r^2 - 20.4375 \\ &= 3.14 \times 15^2 - 20.4375 \\ &= 3.14 \times 225 - 20.4375 \\ &= 706.5 - 20.4375 = 686.0625 \text{ cm}^2 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

29. त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 120° का कोण अंतरित करती है। संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi=3.14$ और $\sqrt{3}=1.73$ का प्रयोग कीजिए)

हल :



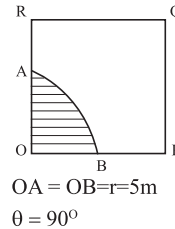
त्रिज्या (r) = 12 cm

$\theta = 120^\circ$

$$\begin{aligned} \text{संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360} \\ &= \frac{3.14 \times 12 \times 12 \times 120}{360} \\ &= 3.14 \times 48 \\ &= 150.72 \text{ cm}^2 \text{ Ans} \end{aligned}$$

30. 15m भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूंटे से एक घोड़े को 5m लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है। मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोड़ा घास चर सकता है। ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)

हल :

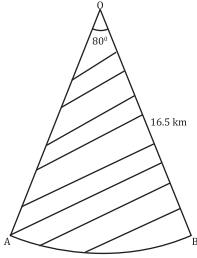


OA = OB = r = 5m
 $\theta = 90^\circ$

$$\begin{aligned} \text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360} \\ &= \frac{3.14 \times 5 \times 5 \times 90}{360} \\ &= \frac{3.14 \times 25}{4} \\ &= \frac{78.5}{4} \\ &= 19.625 \text{ m}^2 \text{ Ans} \end{aligned}$$

31. जहाजों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए, एक लाइट हाउस (light house) 80° कोण वाले एक त्रिज्यखंड में 16.5 km की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलाता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें जहाजों को चेतावनी दी जा सके। ($\pi=3.14$ का प्रयोग कीजिए)

हल :



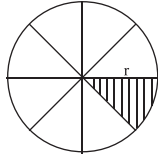
त्रिज्या (r) = 16.5 km

$\theta = 80^\circ$

$$\begin{aligned} \text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} \\ &= \frac{3.14 \times 16.5 \times 16.5 \times 80}{360} \\ &= \frac{3.14 \times 16.5 \times 33}{9} \\ &= \frac{569.91}{3} \\ &= 189.97 \text{ km}^2 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

32. एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं। छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :



$$\theta = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$r = 45 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360} \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{45 \times 45 \times 45^\circ}{360 \times 8} \\ &= \frac{22275}{28} \\ &= 795.54 \text{ cm}^2 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

33. किसी कार के दो वाइपर (Wipers) हैं. परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लंबाई 25 cm है और 115° के कोण तक घूम कर सफाई कर सकता है। पत्तियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए।

हल : r = 25cm

$\theta = 115^\circ$

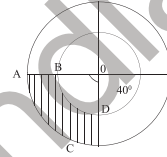
$$\begin{aligned} \text{प्रत्येक वाइपर द्वारा प्रत्येक बुहार का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360} \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{25 \times 25 \times 115^\circ}{360 \times 36} \\ &= \frac{11 \times 625 \times 23}{7 \times 36} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{दोनों वाइपर द्वारा साफ हुआ क्षेत्र} &= \frac{2 \times 11 \times 625 \times 23}{7 \times 36} \text{ cm}^2 \\ &= \frac{158125}{126} \text{ cm}^2 \\ &= 1254.96 \text{ cm}^2 \text{ Ans} \end{aligned}$$

अतः अभीष्ट भाग का क्षेत्रफल 1254.96 cm² है।

34. आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केंद्र O वाले दोनों सकेद्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 7 cm और 14 cm हैं तथा $\angle AOC = 40^\circ$ है।

हल :



OB (r₁) = 7cm

OA (r₂) = 14cm

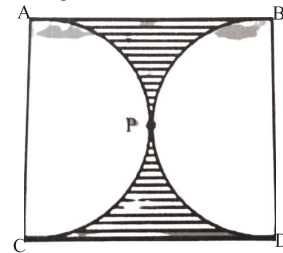
$\theta = 40^\circ$

$$\begin{aligned} \text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r_2^2 \theta}{360} - \frac{\pi r_1^2 \theta}{360} \\ &= \frac{\pi \theta}{360^\circ} (r_2^2 - r_1^2) \\ &= \frac{22 \times 40^\circ}{7 \times 360^\circ} (14^2 - 7^2) \\ &= \frac{22}{63} (196 - 49) \\ &= \frac{22}{63} \times 147 = \frac{154}{3} \text{ cm}^2 \text{ Ans} \end{aligned}$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल $\frac{154}{3}$ cm² है।

35. आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग है तथा APD और BPC दो अर्धवृत्त हैं।

हल :



AB = BC = CD = DA = 14CM

r = अर्धवृत्त की त्रिज्या = $\frac{14}{2} = 7\text{cm}$

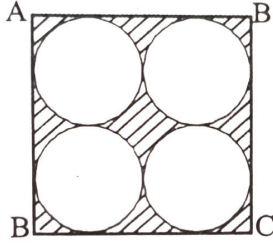
छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \text{वर्ग का क्षेत्रफल} - 2 \times \text{अर्ध वृत्त का क्षेत्रफल} \\ &= (14)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \pi r^2 \\ &= 196 - \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \\ &= 196 - 154 \\ &= 42 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल 42 cm² है।

36. आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग है। हल :

हल :



$$AB = BC = CD = DA = 14 \text{ cm}$$

$$\text{प्रत्येक वृत्त का व्यास} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \text{वृत्त की त्रिज्या}(r) = \frac{7}{2} \text{ cm}$$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल =

वर्ग का क्षेत्रफल - 4 × वृत्त का क्षेत्रफल

$$= (14)^2 - 4 \times \pi r^2$$

$$= 196 - 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

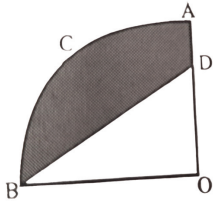
$$= 196 - 154$$

$$= 42 \text{ cm}^2$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल 42 cm² है।

37. आकृति में, OACB केंद्र O और त्रिज्या 3.5 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है। यदि OD = 2 cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :



दिया गया है OD = 2 cm

$$OA = OB = 3.5 \text{ cm}$$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4} \pi r^2 - \Delta BOD$ का क्षेत्रफल

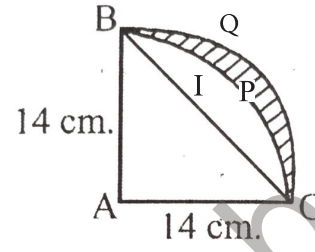
$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{11}{2} \times \frac{7}{2} - \frac{1}{2} \times 3.5 \times 2$$

$$= \frac{77}{8} - \frac{35}{10}$$

$$= \frac{77}{8} - \frac{7}{2} = \frac{77-28}{8} = \frac{49}{8} \text{ cm}^2$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल 49/8 cm² है।

38. आकृति में, त्रिभुज ABC, त्रिज्या 14 cm. वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है। यदि BC को व्यास मानकर एक अर्धवृत्त खींचा गया है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



चतुर्थांश ACPB की त्रिज्या (R) = 14 cm

पाइथागोरस प्रमेय से

$$BC = \sqrt{(14)^2 + (14)^2}$$

$$= \sqrt{2 \times (14)^2}$$

$$= 14\sqrt{2} \text{ cm}$$

वृत्त की त्रिज्या (r) = $7\sqrt{2}$ cm

क्षेत्र I का क्षेत्रफल = चतुर्थांश ACPB का क्षेत्र - ΔABC का क्षेत्र

$$= \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2} \times 14 \times 14$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 - 98$$

$$= 154 - 98$$

$$= 56 \text{ cm}^2$$

छायांकित भाग का क्षेत्र

= अर्धवृत्त का BQC का क्षेत्र - क्षेत्र I का क्षेत्र

$$= \frac{1}{2} \pi r^2 - 56$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{2} \times 7\sqrt{2} - 56$$

$$= \frac{1}{2} \times 22 \times 7 \times 2 - 56$$

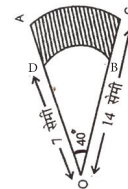
$$= 154 - 56$$

$$= 98 \text{ cm}^2$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल 98 cm² है।

39. आकृति में केन्द्र O वाले संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 7 सेमी और 14 सेमी हैं तथा $\angle AOC = 40^\circ$ हो, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :



दिया गया है,

$$\angle AOC(\theta) = 40^\circ$$

$$OC(r_2) = 14 \text{ cm}$$

$$OD(r_1) = 7 \text{ cm}$$

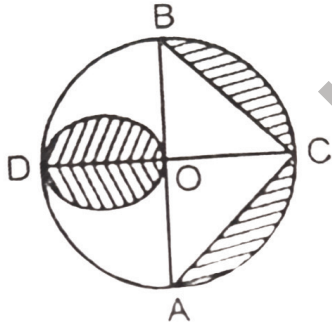
छायांकित भाग का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड OAC का क्षेत्रफल - त्रिज्यखंड OBD का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi r_2^2 \theta}{360^\circ} - \frac{\pi r_1^2 \theta}{360^\circ} \\ &= \frac{\pi \theta}{360^\circ} (r_2^2 - r_1^2) \\ &= \frac{22 \times 40^\circ}{7 \times 360^\circ} (14^2 - 7^2) \\ &= \frac{22}{7 \times 9} \times (196 - 49) \\ &= \frac{22}{7 \times 9} \times 147 = \frac{154}{3} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल $\frac{154}{3} \text{ cm}^2$ है।

40. आकृति में AB और CD, केन्द्र O वाले संकेन्द्रीय वृत्त के परस्पर लम्ब व्यास हैं तथा OD छोटे वृत्त का व्यास है। यदि OA = 7 cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :



दिया गया है कि $AB \perp CD$

बड़े वृत्त की त्रिज्या (R) = OA = OB = OD = OD = 7 cm

छोटे वृत्त की त्रिज्या (r) = $\frac{7}{2} \text{ cm}$

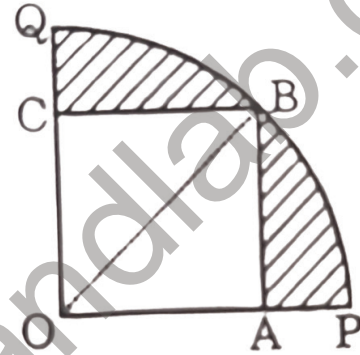
छायांकित भाग का क्षेत्रफल = छोटे वृत्त का क्षेत्रफल + (अर्द्धवृत्त ACB का क्षेत्रफल - ΔABC का क्षेत्रफल)

$$\begin{aligned} &= \pi r^2 + \frac{1}{2} \pi R^2 - \frac{1}{2} \times AB \times OC \\ &= \frac{11}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 - \frac{1}{2} \times 14 \times 7 \\ &= \frac{77}{2} + 77 - 49 \\ &= \frac{77}{2} + \frac{28}{1} \\ &= \frac{77 + 56}{2} \\ &= \frac{133}{2} = 66.5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल 66.5 cm^2 है।

41. आकृति में, चतुर्थांश के अंतर्गत एक वर्ग OABC बना हुआ है। यदि OA = 7 cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :



दिया गया है

$$OA = 7 \text{ cm}$$

OABC एक वर्ग है।

$$\therefore OA = AB = BC = CO = 7 \text{ cm.}$$

पाइथागोरस प्रमेय से

$$\begin{aligned} OB &= \sqrt{OA^2 + AB^2} \\ &= \sqrt{7^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{49 + 49} \\ &= \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = चतुर्थांश OPBQ का क्षेत्रफल - वर्ग OABC का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \pi r^2 - (7)^2 \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 - 49 \\ &= \frac{11}{2} \times 7 - 49 = 77 - 49 \\ &= 28 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल 28 cm^2 है।

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए:

- एक शंकु की ऊँचाई 12 सेमी. है तथा इसके आधार का व्यास 10 सेमी. है। तो शंकु की तिर्यक ऊँचाई है:
 - 13 सेमी.
 - 17 सेमी.
 - 5 सेमी.
 - $\sqrt{149}$ सेमी.
- मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई 24 cm और आधार की त्रिज्या 6cm वाला एक शंकु बनाया गया है। एक बच्चे ने इसे गोले के आकार में बदल दिया, तो गोले की त्रिज्या होगी:
 - 7 cm
 - 12 cm
 - 6 cm
 - 9 cm
- सबसे बड़े बाँस की लम्बाई बताइये जो एक 12 मी. लम्बे, 9 मी. चौड़े तथा 8 मी. ऊँचे कमरे में रखी जा सकती हो?
 - 12 मी.
 - 17 मी.
 - 21 मी.
 - 19 मी.
- दो शंकुओं की ऊँचाई का अनुपात 1:3 है और उनके आधार की त्रिज्या का अनुपात 3:1 है। उनके आयतन का अनुपात ज्ञात कीजिये?
 - 3:1
 - 2:1
 - 4:1
 - 5:1
- किसी गोले को लंब वृत्तीय बेलन में परिवर्तित किया गया है। गोला और बेलन की त्रिज्या क्रमशः 21 सेमी और 14 सेमी है। बेलन की ऊँचाई कितनी होगी:
 - 63 सेमी
 - 56 सेमी
 - 42 सेमी
 - 49 सेमी

वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के उत्तर

1	2	3	4	5
a	c	b	a	a

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

- 7cm त्रिज्या तथा 5cm ऊँचाई वाले लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल. $r=7$ cm, $h=5$ cm

$$\begin{aligned} \text{बेलन का आयतन} &= \pi r^2 h \\ &= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 5 \\ &= 154 \times 5 \\ &= 770 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

- एक गोले का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल 154 cm^2 है। गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल. गोले का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल = 154 cm^2

$$\begin{aligned} \Rightarrow 4\pi r^2 &= 154 \\ \Rightarrow 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 &= 154 \\ \Rightarrow 4 \times 22 \times r^2 &= 154 \times 7 \\ \Rightarrow r^2 &= \frac{7 \times 154 \times 7}{4 \times 22 \times 7} \\ \Rightarrow r^2 &= \frac{7 \times 7}{4} \\ \Rightarrow r &= \sqrt{\frac{7 \times 7}{2 \times 2}} = \frac{7}{2} \text{ cm} \\ \text{गोले का आयतन} &= \frac{4}{3} \times \frac{11 \times 22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \\ &= \frac{539}{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

- एक शंकु की ऊँचाई 12 cm है और आधार की त्रिज्या 7 cm है। इस शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल. $h=12$ cm, $r=7$ cm

$$\begin{aligned} \text{शंकु का आयतन} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 12 \\ &= 88 \times 7 \text{ cm}^3 \\ &= 616 \text{ cm}^3 \text{ Ans} \end{aligned}$$

- 14 cm त्रिज्या वाले अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल. $r=14$ cm

$$\begin{aligned} \text{अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2\pi r^2 \\ &= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \\ &= 44 \times 28 \text{ cm}^2 \\ &= 1232 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- एक शंकु की तिर्यक ऊँचाई 16 cm है और आधार की त्रिज्या 14 cm है। इस शंकु का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल. $l=16$ cm, $r=14$ cm

$$\begin{aligned} \text{शंकु का वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल} &= \pi r l \\ &= \frac{22}{7} \times 14 \times 16 \\ &= 22 \times 32 \text{ cm}^2 \\ &= 704 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

11. उस शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या और ऊँचाई क्रमशः 6cm और 8cm है।

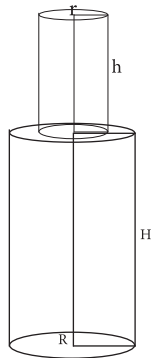
हल. $r=6 \text{ cm}$, $h=8 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} \text{शंकु का आयतन} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 8 \\ &= \frac{44 \times 48}{7} \text{ cm}^3 = \frac{2112}{7} \text{ cm}^3 \text{ Ans} \end{aligned}$$

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

12. ऊँचाई 220 cm और आधार व्यास 24cm वाले एक बेलन, जिस पर ऊँचाई 60 cm और त्रिज्या 5 cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लोहे का एक स्तंभ बना है। इस स्तंभ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है कि 1 cm^3 लोहे का द्रव्यमान लगभग 8 g होता है।

हल.



घनत्व = 8 gm/cm^3

$r=5 \text{ cm}$, $h=60 \text{ cm}$, $R = \frac{24}{2} = 12 \text{ cm}$ तथा $H=220 \text{ cm}$

$$\begin{aligned} \text{स्तंभ का आयतन} &= \pi r^2 h + \pi R^2 H \\ &= \pi (r^2 h + R^2 H) \\ &= \frac{22}{7} \times (25 \times 60 + 12 \times 12 \times 220) \\ &= \frac{22}{7} (1500 + 144 \times 220) \\ &= \frac{22}{7} (1500 + 31680) \\ &= \frac{22}{7} \times 33180 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

$\therefore 1 \text{ cm}^3$ लोहे का द्रव्यमान 8 g है

$$\begin{aligned} \text{स्तंभ का द्रव्यमान} &= \text{आयतन} \times \text{घनत्व} \\ &= \frac{22}{7} \times 33180 \times 8 \\ &= \frac{5839680}{7} \\ &= 834240 \text{ gm} \\ &= 834.20 \text{ kg Ans} \end{aligned}$$

13. दो घनो , जिनमें से प्रत्येक का आयतन 64 cm^3 है के संगत पलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

हल. दो घनो के संगत फलको को मिलाने से घनाभ बनता है ,

$$\begin{aligned} \text{घन का आयतन} &= 64 \text{ cm}^3 \\ \Rightarrow a^3 &= 64 \\ \Rightarrow a &= \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4 \times 4 \times 4} \\ \therefore a &= 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$b = 4 \text{ cm} , h = 4 \text{ cm} ,$$

$$l = 4 + 4 = 8 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2(lb + bh + lh) \\ &= 2(8 \times 4 + 4 \times 4 + 8 \times 4) \\ &= 2(32 + 16 + 32) \\ &= 2 \times 80 \\ &= 160 \text{ cm}^2 \text{ Ans...} \end{aligned}$$

14. भुजा 7cm वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर एक अर्धगोला रखा हुआ है। अर्धगोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है ? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

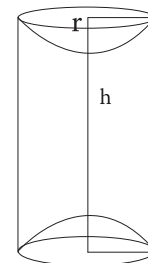
हल. घन के किनारे की अधिकतम लम्बाई $(l)=7 \text{ cm}$

अर्धगोले का व्यास = 7 cm

$$r = \text{त्रिज्या} = 7/2 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 5l^2 + l^2 - \pi r^2 + 2\pi r^2 \\ &= 6l^2 + \pi r^2 \\ &= 6 \times 7 \times 7 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \\ &= \frac{294}{1} + \frac{77}{2} \\ &= \frac{588 + 77}{2} \\ &= \frac{665}{2} \text{ cm}^2 = 332.5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

15. लकड़ी के एक ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्धगोला खोदकर निकालते हुए, एक वस्तु बनाई गई है, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm है और आधार की त्रिज्या 3.5 cm है तो इस वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।



हल.

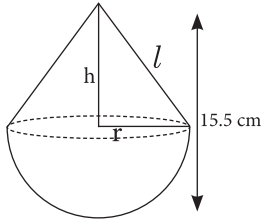
यहाँ,

$$r = 3.5 \text{ cm} = 7/2 \text{ cm} , h = 10 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}
\text{संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2\pi rh + 2\pi r^2 + 2\pi r^2 \\
&= 2\pi rh + 4\pi r^2 \\
&= 2\pi r(h + 2r) \\
&= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \left(10 + 2 \times \frac{7}{2}\right) \\
&= 22(10 + 7) \\
&= 374 \text{ cm}^2 \text{ Ans...}
\end{aligned}$$

16. एक खिलौना त्रिज्या 3.5 cm वाले एक शंकु के आकार का है, जो उसी त्रिज्या वाले अर्धगोले पर अध्यारोपित है। उस खिलौने की सम्पूर्ण ऊँचाई 15.5 cm है। इस खिलौने सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल.



शंकु के लिए

$$r = 3.5 \text{ cm}, h = 15.5 - 3.5 = 12 \text{ cm}$$

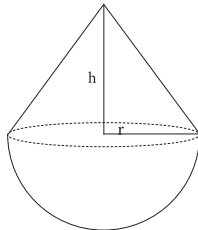
$$\begin{aligned}
l &= \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{(12)^2 + (3.5)^2} \\
&= \sqrt{144 + 12.25} \\
&= \sqrt{156.25} \\
&= 12.5 \text{ cm}
\end{aligned}$$

अर्धगोले की त्रिज्या (r) = 3.5 cm

$$\begin{aligned}
\text{ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2\pi r^2 + \pi r l \\
&= \pi r(2r + l) \\
&= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \left(2 \times \frac{7}{2} + 12.5\right) \\
&= 11(7 + 12.5) \\
&= 11 \times 19.5 = 214.5 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}
\end{aligned}$$

17. एक ठोस एक अर्धगोले पर खड़े एक शंकु के आकार का है जिनकी त्रिज्याएँ 1 cm हैं तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस ठोस का आयतन π के दोषों में ज्ञात कीजिए।

हल.



दिया गया है,

$$r = h = 1 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}
\text{ठोस का आयतन} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 \\
&= \frac{1}{3} \times \pi (1)^2 \times 1 + \frac{2}{3} \pi \times (1)^3 \\
&= \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \\
&= \frac{\pi + 2\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} = \pi \text{ cm}^3 \text{ Ans..}
\end{aligned}$$

18. भुजा 5 cm वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर 4.2 cm व्यास वाला एक अर्धगोला रखा हुआ है। इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

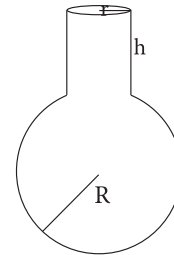
हल. घन के किनारे की लम्बाई (l) = 5 cm

$$\text{अर्धगोला की त्रिज्या (r)} = \frac{4.2}{2} = 2.1 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}
\text{ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 5l^2 + l^2 - \pi r^2 + 2\pi r^2 \\
&= 6l^2 + \pi r^2 \\
&= 6 \times 25 + \frac{22}{7} \times \frac{21^3}{10} \times 2.1 \\
&= 150 + \frac{66 \times 2.1}{10} \\
&= 150 + 13.86 \\
&= 163.86 \text{ cm}^2 \text{ Ans...}
\end{aligned}$$

19. एक गोलाकार काँच के बर्तन की एक बेलन के आकार की गर्दन है जिसकी लंबाई 8 cm है और व्यास 2 cm है जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5 cm है। इसमें भरे जा सकने वाली पानी की मात्रा माप कर एक बच्चे ने यह ज्ञात किया कि इस बर्तन का आयतन 345 cm³ है। जाँच कीजिए कि उस बच्चे का उत्तर सही है या नहीं, यह मानते हुए कि उपरोक्त मापन आंतरिक मापन है।

हल.



$$r = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}, h = 8 \text{ cm}, R = \frac{8.5}{2} \text{ cm}$$

बर्तन का आयतन

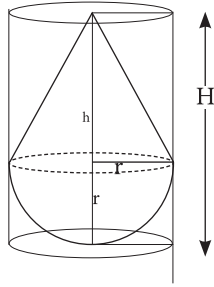
$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{3} \pi R^3 + \pi r^2 h \\
&= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{8.5 \times 8.5 \times 8.5}{2 \times 2 \times 2} + \frac{22}{7} \times 1 \times 1 \times 8 \\
&= \frac{6755.375}{21} + \frac{176}{7} \\
&= 321.68 + 25.14 \\
&= 346.82 \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

बच्चे की गणना गलत है।

$$\text{सही आयतन} = 346.82 \text{ cm}^3$$

20. एक ठोस में, ऊँचाई 120 cm और त्रिज्या 60 cm वाला एक शंकु सम्मिलित है, जो 60 cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर आरोपित है। इस ठोस को पानी से भरे हुए एक लंब वृत्तीय बेलन में इस प्रकार सीधा डाल दिया जाता है कि यह बेलन की तली को स्पर्श करे। यदि बेलन की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 180 cm है तो बेलन में शेष बचे पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल.



अर्धगोले की त्रिज्या = शंकु की त्रिज्या = बेलन की त्रिज्या (r) = 60 cm

शंकु की ऊँचाई (h) = 120 cm

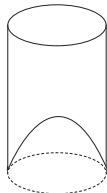
बेलन की ऊँचाई (H) = 180 cm

बेलन में बचे पानी का आयतन = बेलन का आयतन - ठोस का आयतन

$$\begin{aligned} &= \pi r^2 H - \left(\frac{2}{3} \pi r^3 + \frac{1}{3} \pi r^2 h \right) \\ &= \pi r^2 H - \frac{\pi r^2}{3} (2r + h) \\ &= \pi r^2 \left\{ H - \frac{1}{3} (2r + h) \right\} \\ &= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 \left\{ 180 - \frac{1}{3} (2 \times 60 + 120) \right\} \\ &= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 \left\{ 180 - \frac{1}{3} \times 240 \right\} \\ &= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 \times 100 \text{ cm}^3 \\ &= \frac{7920000 \text{ cm}^3}{7} \\ &= 1131428.57 \text{ cm}^3 = 1.131 \text{ m}^3 \text{ Ans...} \end{aligned}$$

21. एक जूस बेचने वाला अपने ग्राहकों को चित्र में दर्शाए गए गिलासों से दूध देता था। बेलनाकार गिलास का आंतरिक व्यास 5 cm था, परंतु गिलास के निचले आधार में एक उभरा हुआ अर्धगोला था जिससे गिलास की धारिता कम हो जाती थी। यदि गिलास की ऊँचाई 10 cm थी, तो गिलास का वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए।

हल.



त्रिज्या = r = 5/2 cm, ऊँचाई = h = 10 cm

गिलास का वास्तविक धारिता

$$\begin{aligned} &= \pi r^2 h - \frac{2}{3} \pi r^3 \\ &= \pi r^2 \left(h - \frac{2r}{3} \right) \\ &= \frac{22 \times 11}{7} \times \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} \left(10 - \frac{2}{3} \times \frac{5}{2} \right) \\ &= \frac{25 \times 11}{14} \left(\frac{10}{1} - \frac{5}{3} \right) \\ &= \frac{25 \times 11}{14} \left(\frac{30 - 5}{3} \right) \\ &= \left(\frac{25 \times 11}{14} \times \frac{25}{3} \right) \\ &= \frac{6875}{42} = 163.69 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

22. 6 m चौड़ी और 1.5 m गहरी एक नहर में पानी 10 km/h की चाल से बह रहा है। 30 मिनट में यह नहर कितने क्षेत्रफल की सिंचाई कर पायेगी, जबकि सिंचाई के लिए 8 से.मी. गहरे पानी की आवश्यकता होती है।

हल.

चौड़ाई = 6 m, गहराई = 1.5 m

$$10 \text{ km/h} = \frac{10 \times 5}{180} \text{ m/s} = \frac{25}{9} \text{ m/s}$$

$$\text{नहर की लम्बाई} = \frac{25}{9} \times 30 \times 60 = 5000 \text{ m}$$

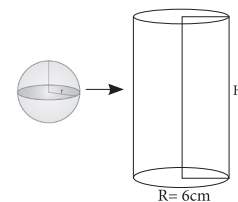
$$\begin{aligned} \text{नहर में पानी की मात्रा} &= 5000 \times 6 \times \frac{15}{100} \\ &= 500 \times 90 \\ &= 45000 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{सिंचाई किये गए क्षेत्रफल} &= \frac{\text{नहर में पानी की मात्रा}}{\text{पानी की गहराई}} \\ &= \frac{45000}{\frac{8}{100}} \\ &= \frac{45000 \times 100}{8} \\ &= 562500 \text{ m}^2 \\ &= 56.25 \text{ हेक्टेयर Ans.} \end{aligned}$$

23. त्रिज्या 4.2 cm वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6 cm वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल

r = 4.2 cm



बेलन का आयतन = गोले का आयतन

$$\begin{aligned} \Rightarrow \pi R^2 H &= \frac{4}{3} \pi r^3 \\ \Rightarrow 6^2 H &= \frac{4}{3} \times \frac{42^3}{105} \times 4.2 \times 4.2 \end{aligned}$$

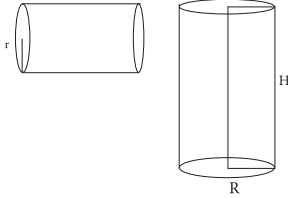
$$\Rightarrow 36 \times H = \frac{2 \times 14 \times 4.2 \times 4.2}{5}$$

$$\Rightarrow H = \frac{28 \times 4.2 \times 4.2}{36 \times 5}$$

$$\Rightarrow H = 2.744 = 2.74 \text{ cm Ans..}$$

24. एक किसान अपने खेत में बनी 10m व्यास वाली और 2m गहरी एक बेलनाकार टंकी को आंतरिक व्यास 20 cm वाले एक पाइप द्वारा एक नहर से जोड़ता है। यदि पाइप में पानी 3 km/hour की चाल से बह रहा है तो कितने समय बाद टंकी पूरी भर जाएगी।

हल.



$$r = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm} = \frac{1\phi}{10\phi} = \frac{1}{10} \text{ m}$$

$$R = \frac{10}{2} = 5 \text{ m}, H = 2 \text{ m}$$

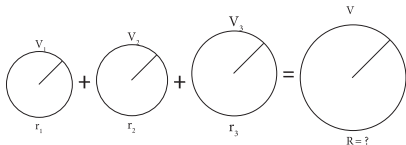
$$\text{पाइप में पानी की चाल} = 3 \text{ km/h} = 3 \times \frac{5}{186} = \frac{5}{6} \text{ m/sec}$$

$$\therefore h = \text{पाइप की लम्बाई} = \frac{5}{6} \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \text{टंकी को भरने में लगा समय} &= \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} \\ &= \frac{5 \times 5 \times 2}{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{5}{6}} \\ &= \frac{50}{\frac{1}{100} \times \frac{5}{6}} = \frac{50}{\frac{5}{600}} \\ &= \frac{50 \times 600}{5} = 6000 \text{ sec} \\ &= \frac{100 \times 6000}{60} \text{ min} \\ &= 100 \text{ min Ans...} \end{aligned}$$

25. क्रमशः 6 cm, 8 cm, 10 cm त्रिज्याओं वाले धातु के तीन ठोस गोलों को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल.



प्रश्नानुसार,

$$V_1 + V_2 + V_3 = V$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi r_1^3 + \frac{4}{3} \pi r_2^3 + \frac{4}{3} \pi r_3^3 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi (r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\Rightarrow R^3 = (6)^3 + (8)^3 + (10)^3$$

$$\Rightarrow R^3 = 216 + 512 + 1000$$

$$\Rightarrow R^3 = 1728$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[3]{1728} = 12 \text{ m}$$

$$\therefore R = 12 \text{ cm Ans..}$$

26. व्यास 7m वाला 20m गहरा कुआँ खोदा जाता है और खोदने से निकली हुई मिट्टी को समान रूप से फैलाकर 22m X 14m वाला एक चबूतरा बनाया गया है। इस चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल.

$$\begin{aligned} \text{चबूतरे की ऊँचाई} &= \frac{\text{कुआँ का आयतन}}{\text{चबूतरे का क्षेत्रफल}} \\ &= \frac{\pi r^2 h}{l \times b} \\ &= \frac{\frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 20 \times 10^5}{22 \times 14} \\ &= \frac{22 \times 7 \times 5}{22 \times 14} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ m Ans..} \end{aligned}$$

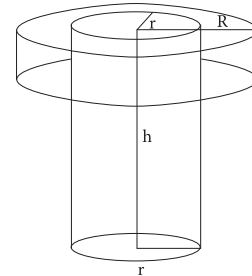
27. विमाओं 5.5 cm x 10 cm x 3.5 cm वाला एक घनाभ बनाने के लिए, 1.75 cm व्यास और 2mm मोटाई वाले कितने चाँदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा?

हल.

$$\begin{aligned} \text{सिक्कों की संख्या} &= \frac{\text{घनाभ का आयतन}}{\text{एक सिक्के का आयतन}} \\ &= \frac{5.5 \times 10 \times 3.5}{\frac{22}{7} \times \frac{1.75}{2} \times \frac{1.75}{2} \times \frac{2}{10}} \\ &= \frac{55}{10} \times 10 \times \frac{35}{10} \times 7 \times \frac{4}{2} \times 10 \\ &= \frac{55 \times 35 \times 7}{11 \times 1.75 \times 1.75} = \frac{13475}{33.6875} \\ &= 400 \text{ Ans...} \end{aligned}$$

28. व्यास 3 m वाला 14 m गहरा कुआँ खोदा जाता है और खोदने से निकली हुई मिट्टी को कुआँ के चारों ओर 4 मीटर चौड़ी वृत्ताकार वलय (Ring) बनाते हुए, समान रूप से फैला कर एक बाँध बनाया जाता है। इस बाँध की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल.



$$\text{कुआँ का व्यास} = 3 \text{ m}$$

$$\text{त्रिज्या}(r) = 3/2 \text{ m}$$

$$\text{गहराई}(h) = 14 \text{ m}$$

$$\text{वलय की आन्तरिक त्रिज्या}(r) = 3/2 \text{ m}$$

$$\text{बाह्य त्रिज्या}(R) = \frac{3}{2} + \frac{4}{1} = \frac{11}{2} \text{ m}$$

$$\text{बाँध की ऊँचाई} = \frac{\text{कुआँ का आयतन}}{\text{वृत्ताकार वलय का क्षेत्रफल}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi r^2 h}{\pi(R^2 - r^2)} \\
&= \frac{\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times 147}{\left\{ \left(\frac{11}{2} \right)^2 - \left(\frac{3}{2} \right)^2 \right\}} \\
&= \frac{63}{2} \\
&= \frac{\left(\frac{121}{4} - \frac{9}{4} \right)}{\left(\frac{121}{4} - \frac{9}{4} \right)} \\
&= \frac{63}{2} = \frac{63}{2} \times \frac{4^2}{11256} \\
&= \frac{63}{56} \text{ m} = 1.125 \text{ m Ans..}
\end{aligned}$$

29. पानी पीने वाला एक गिलास 14 cm ऊँचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के आकार का है। दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 14 cm और 2 cm है। इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए।

हल.

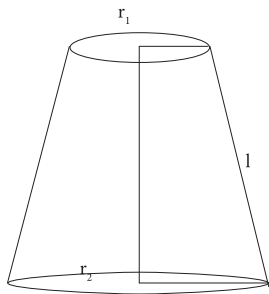
$$r_1 = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

$$r_2 = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}$$

$$h = 14 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}
\text{गिलास की धारिता} &= \frac{\pi h}{3} (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) \\
&= \frac{22}{7} \times \frac{14^2}{3} (7^2 + 1^2 + 7 \times 1) \\
&= \frac{44}{3} (49 + 1 + 7) \\
&= \frac{44}{3} \times 57 = 19 \\
&= 44 \times 19 = 836 \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

30. एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई 4 cm है तथा इसके वृत्तीय सिरों के परिमाप (परिधियाँ) 18 cm और 6 cm हैं। इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



हल.

दिया गया है- छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई = $l = 4 \text{ cm}$

$$2\pi r_1 = 6 \text{ cm} \Rightarrow r_1 = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$$

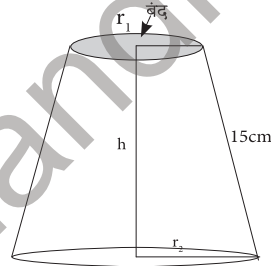
$$2\pi r_2 = 18 \text{ cm} \Rightarrow r_2 = \frac{18}{2\pi} = \frac{9}{\pi}$$

छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
&= \pi l (r_1 + r_2) \\
&= \pi \times 4 \left(\frac{3}{\pi} + \frac{9}{\pi} \right) \\
&= \pi \times 4 \left(\frac{3+9}{\pi} \right) \\
&= 4 \times 12 = 48 \text{ cm}^2 \text{ Ans..}
\end{aligned}$$

31. एक तुर्की टोपी शंकु के एक छिन्नक के आकार की है। यदि इसके खुले सिरे की त्रिज्या 10 cm है, ऊपरी सिरे की त्रिज्या 4 cm है और टोपी की तिर्यक ऊँचाई 15 cm है, तो इसके बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल.



$$r_1 = 4 \text{ cm}, r_2 = 10 \text{ cm}, l = 15 \text{ cm}$$

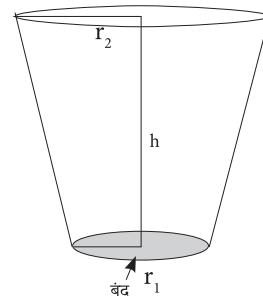
प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
&= \pi l (r_1 + r_2) + \pi r_1^2 \\
&= \frac{22}{7} \times 15 \times (4 + 10) + \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \\
&= \frac{22}{7} \times 15 \times 14 + \frac{22}{7} \times 4 \times 4 \\
&= \frac{44 \times 15}{1} + \frac{44 \times 8}{7} \\
&= 44 \left(\frac{15}{1} + \frac{8}{7} \right) \\
&= 44 \left(\frac{105 + 8}{7} \right) \\
&= \frac{44 \times 113}{7} \\
&= \frac{4972}{7} = 710 \frac{2}{7} \text{ cm}^2 \text{ Ans..}
\end{aligned}$$

32.

धातु की चादर से बना और ऊपर से खुला एक बर्तन शंकु के एक छिन्नक के आकार का है, जिसकी ऊँचाई 16 cm है तथा निचले और ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 cm और 20 cm हैं। 20 प्रति लीटर की दर से इस बर्तन को पूरा भर सकने वाले दूध का मूल्य ज्ञात कीजिए। साथ ही इस बर्तन को बनाने के लिए प्रयुक्त धातु की चादर का मूल्य र 8 प्रति 100 cm² की दर से ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए।)

हल.



$$r_1 = 8 \text{ cm}, r_2 = 20 \text{ cm}, h = 16 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}
 \text{बर्तन की धारिता} &= \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2) \\
 &= \frac{3.14 \times 16}{3}(8^2 + 20^2 + 8 \times 20) \\
 &= \frac{3.14 \times 16}{3}(64 + 400 + 160) \\
 &= \frac{3.14 \times 16}{3} \times 624 \\
 &= \frac{31349.76}{3} \text{ cm}^3 \\
 &= \frac{31349.76}{3000} \text{ liters}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{दूध की कीमत} &= 31349.76 / 3000 \times 20 \\
 &= \frac{31349.76}{3000} \times 20 \\
 &= \text{Rs. 209 Ans}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अब,} \\
 l &= \sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} \\
 &= \sqrt{16^2 + (20 - 8)^2} \\
 &= \sqrt{16^2 + (12)^2} \\
 &= \sqrt{256 + 144} \\
 &= \sqrt{400} \\
 &= 20 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{प्रयुक्त चादर का क्षेत्रफल} \\
 &= \pi l(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 \\
 &= 3.14 \times 20 \times (20 + 8) + 3.14 \times 8 \times 8 \\
 &= 3.14 \times 20 \times 28 + 3.14 \times 64 \\
 &= 3.14(20 \times 28 + 64) \\
 &= 3.14 \times (560 + 64) \\
 &= 3.14 \times 624 = 1959.36 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{धातु के चादर की कीमत} &= 1959.36 \times \frac{8}{100} \\
 &= \text{Rs. 156.75 Ans}
 \end{aligned}$$

33. गन्ने के रस का राव शंकु छिन्नक के आकार के सांचे में डाला जाता है जिनमें से प्रत्येक के दोनों वृत्तीय फलकों के व्यास क्रमशः 30 cm और 35 cm हैं तथा सांचे की उर्ध्वाधर ऊँचाई 14 cm है। यदि 1 cm³ राव का द्रव्यमान लगभग 1.2 gm है, तो प्रत्येक सांचे में भरी जा सकने वाली राख का द्रव्यमान ज्ञात करें।

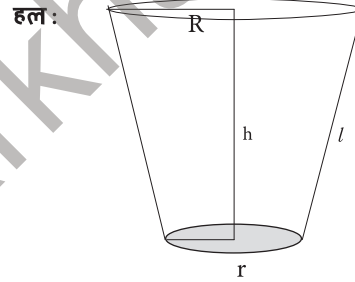
$$\begin{aligned}
 \text{हल: } r_1 &= \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}, r_2 = \frac{35}{2} \text{ cm} \\
 h &= 14 \text{ cm} \\
 V &= \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2) \\
 &= \frac{22}{7} \times \frac{14}{3} \left(225 + 306.25 + \frac{35 \times 15}{2} \right) \\
 &= \frac{22}{7} \times \frac{14}{3} (225 + 306.25 + 262.5) \\
 &= \frac{22}{7} \times \frac{14}{3} \times 793.75 \text{ cm}^3 \\
 m &= \rho V = \frac{22}{7} \times \frac{14}{3} \times 793.75 \times 1.2 \\
 &= \frac{293370}{21} = 13970 \text{ gm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 13.94 \text{ kg} \\
 &= 14 \text{ kg (लगभग)}
 \end{aligned}$$

34. एक शंकु के छिन्नक, जो 45 cm ऊँचा है, के सिरों की त्रिज्याएँ 28 cm और 7 cm हैं। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल: } h &= 45 \text{ cm}, r_1 = 28 \text{ cm}, r_2 = 7 \text{ cm} \\
 V &= \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) \\
 &= \frac{22}{7} \times \frac{45}{3} [(28)^2 + (7)^2 + 28 \times 7] \\
 &= \frac{22 \times 15}{7} [784 + 49 + 196] \\
 &= \frac{22 \times 15}{7} \times 1029 = 48510 \text{ cm}^3 \text{ Ans}
 \end{aligned}$$

35. धातु से बनी खुली बाल्टी शंकु के छिन्नक के आकार की है, इस बाल्टी के दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 45 cm और 25 cm हैं तथा बाल्टी की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 34 cm है। इस बाल्टी को बनाने में प्रयुक्त धातु की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



$$\begin{aligned}
 r &= \frac{25}{2} \text{ cm}, R = \frac{45}{2} \text{ cm}, h = 34 \\
 l &= \sqrt{h^2 + (R - r)^2} \\
 &= \sqrt{(34)^2 + \left(\frac{45}{2} - \frac{25}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{1156 + \left(\frac{20}{2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{1156 + 10^2} \\
 &= \sqrt{1156 + 100} \\
 &= \sqrt{1256} \\
 &= 35.44 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{प्रयुक्त धातु का क्षेत्रफल} &= \pi l(R + r) + \pi r^2 \\
 &= \frac{22}{7} \times 35.44 \times \left(\frac{45}{2} + \frac{25}{2}\right) + \frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2} \\
 &= \frac{22}{7} \times 35.44 \times \frac{70}{2} + \frac{22^{11}}{7} \times \frac{625}{4} \\
 &= \frac{27288.8}{7} + \frac{6875}{14} \\
 &= \frac{54577.6 + 6875}{14} \\
 &= \frac{61452.6}{14} \\
 &= 4389.47 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए:

- प्रथम तीन सम संख्याओं का माध्य होगा:
 - 2
 - 4
 - 3
 - 6
- आँकड़े 7, 8, 9, 9, 3, 5, 4, का बहुलक है:
 - 7
 - 8
 - 9
 - 3
- निम्नलिखित में से कौन-सा संबंध सही है:
 - 3 माध्यक = बहुलक - 2 माध्य
 - 3 माध्यक = बहुलक + 2 माध्य
 - माध्यक = 3 बहुलक + 2 माध्य
 - माध्यम = 3 बहुलक - 2 माध्य
- आँकड़े 7, 15, 10, 9, 4, 3, 7, 10, 10, 8, 16, की माध्यिका है:
 - 7
 - 8
 - 10
 - 9
- केन्द्रीय प्रवृत्ति की सबसे उपयुक्त माप है:
 - माध्य
 - माध्यक
 - बहुलक
 - इनमें कोई नहीं
- प्रत्यक्ष विधि क्या ज्ञात करने की एक विधि है ?
 - माध्य
 - बहुलक
 - माध्यक
 - इनमें कोई नहीं

7

वर्ग अंतराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारंबारता	3	7	12	5	3

उपरोक्त दिए गए आंकड़ों के लिए माध्यक वर्ग की बारंबारता है-

- 7
- 3
- 12
- 5

8.

वर्ग अंतराल	10-15	15-20	20-25	25-30
बारंबारता	8	9	12	11

उपरोक्त दिए गए आंकड़ों के लिए माध्यक वर्ग है:

- 25-30
- 15-20
- 20-25
- 10-15

9.

चर	0	1	2	3	4	5	6
बारंबारता	1	3	9	7	1	6	5

उपरोक्त दिए गए आंकड़ों के लिए बहुलक है:

- 0
- 2
- 3
- 4

10.

वर्ग अंतराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारंबारता	11	23	40	17	28

उपरोक्त दिए गए आंकड़ों के लिए बहुलक वर्ग है:

- 40-50
- 30-40
- 20-30
- 10-20

11. आँकड़े 3, 1, 3, 2, 1, 2, 0, 1, 3, 2, 3, 3 का बहुलक है

- 0
- 2
- 3
- 4

12. वर्ग अंतराल एवं संचयी बारंबारता के बीच खींचे गये आलेख को कहते हैं।

- माध्यक
- बहुलक
- माध्य
- तोरण

वस्तुनिष्ठ प्रश्न के उत्तर

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b	c	b	d	a	a	c	c	b	c	c	d

अति लघु उत्तरीय प्रश्न

13. 1, 0, 5 और 6 का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल. माध्य = $\frac{1+0+5+6}{4} = \frac{12}{4} = 3$ Ans.

14. यदि x, 2, 3, और 5 का माध्य 4 हो, तो x ज्ञात कीजिए।

हल. माध्य = $\frac{x+2+3+5}{4}$

$$\Rightarrow \frac{4}{1} = \frac{x+10}{4}$$

$$\Rightarrow 16 = x+10$$

$$\Rightarrow x = 16 - 10 = 6$$
 Ans.

15. प्रथम पाँच पूर्ण संख्याओं का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल. माध्य = $\frac{0+1+2+3+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$ Ans.

16. 2, 3, 5, 7, 9 की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल. : 2, 3, 5, 7, 9

n=5 (विषम)

माध्यिका

$$= \left(\frac{n+1}{2}\right)^{th} \text{ पद} = \left(\frac{5+1}{2}\right)^{th} \text{ पद}$$

$$= 3^{\text{राँ}} \text{ पद} = 5 \text{ Ans.}$$

17. माध्य, माध्यिका तथा बहुलक के बीच संबंध बताइए।

हल. बहुलक = 3 x माध्यिका - 2 x माध्य

18. x-a, x, x+a का माध्य ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल. माध्य} = \frac{x-a+x+x+a}{3} = \frac{3x}{3} = x \text{ Ans.}$$

19. यदि माध्य = 60 और माध्यिका = 50 हो तो बहुलक ज्ञात कीजिए।

हल. बहुलक = 3x माध्यिका - 2x माध्य

$$= 3 \times 50 - 2 \times 60$$

$$= 150 - 120 = 30$$

$$\therefore \text{बहुलक} = 30 \text{ Ans.}$$

20. 10 क्रिकेट मैचों में एक गेंदबाज द्वारा लिए गए विकेट की संख्या निम्नलिखित है: 2, 6, 4, 5, 0, 2, 1, 3, 2, 3

हल. \therefore क्योंकि 2 की बारम्बारता सबसे अधिक है।

$$\therefore \text{बहुलक} = 2 \text{ Ans.}$$

21. संचयी बारंबारता वक्र को भी कहते हैं।

हल. तोरण

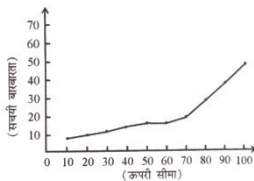
22. वर्ग अंतराल की उपरी सीमाएँ एवं संचयी बारंबारता के बीच खींचे गये आलेख को किस प्रकार का तोरण कहा जाता है?

हल. से कम प्रकार का तोरण

23. वर्ग अंतराल की निम्न सीमाएँ एवं संचयी बारंबारता के बीच खींचे गये आलेख को किस प्रकार का तोरण कहा जाता है?

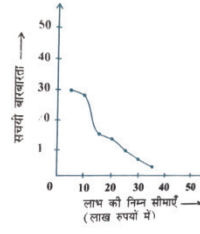
हल. से अधिक प्रकार का तोरण

24. निम्न चित्र किस प्रकार का तोरण है?



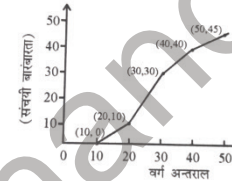
हल. से कम प्रकार का तोरण

25. निम्न चित्र किस प्रकार का तोरण है?



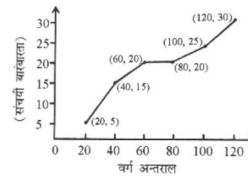
हल. से अधिक प्रकार का तोरण

26. नीचे दिये गये संचयी बारंबारता वक्र के ग्राफ से वर्ग अंतराल 40-50 का संचयी बारंबारता लिखिए।



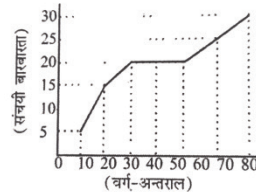
हल. 45 Ans.

27. नीचे दिये गये संचयी बारंबारता वक्र के ग्राफ से वर्ग अंतराल 60-80 का बारंबारता लिखिए।



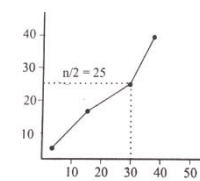
हल. 0 Ans.

28. निम्न चित्र किस प्रकार का तोरण है?



हल. से कम प्रकार का तोरण

29. नीचे दिए गए संचयी बारंबारता वक्र से कुल बारंबारता n = 50 का माध्यक ज्ञात कीजिए।



हल. 30 Ans.

30. 'से कम प्रकार' का तोरण और 'से अधिक प्रकार' का तोरण के प्रतिच्छेद बिंदु से किस केंद्रीय प्रवृत्ति का मान ज्ञात होता?

हल. माध्यिका

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

31. निम्न आँकड़ों से माध्य ज्ञात कीजिए:

वर्ग अंतराल	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
बारंबारता	4	5	12	2	2

हल.

वर्ग अन्तराल (C.I.)	बारम्बारता (f_i)	वर्ग चिन्ह (x_i)	$f_i x_i$
100-150	4	125	500
150-200	5	175	875
200-250	12	225	2700
250-300	2	275	550
300-350	2	325	650
योग	25		5275

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{5275}{25} = 211 \text{ Ans.}$$

32. निम्न आँकड़ों से माध्य ज्ञात कीजिए:

वर्ग अंतराल	50-52	52-54	54-56	56-58	58-60
बारंबारता	15	110	135	115	25

हल.

वर्ग अन्तराल (C.I.)	बारम्बारता (f_i)	वर्ग चिन्ह (x_i)	$f_i x_i$
50-52	15	51	765
52-54	110	53	5830
54-56	135	55	7425
56-58	115	57	6555
58-60	25	59	1475
योग	400		22050

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{22050}{400} = 55.125$$

33. निम्न आँकड़ों से माध्यिका ज्ञात कीजिए:

वर्ग अंतराल	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
बारंबारता	6	9	12	6	7

वर्ग अन्तराल (C.I.)	बारम्बारता (f_i)	संचयी बारम्बारता (cf)
100-150	6	6
150-200	9	15=c
200-250	12=f	27
250-300	6	33
300-350	7	40
योग	40	

$$\therefore N = 40$$

$$\therefore \frac{N}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

माध्यिका वर्ग= 200-250

$$l = 200, h = 50, f = 12, c = 15$$

$$\text{माध्यिका} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - c}{f} \right) \times h$$

$$= 200 + \left(\frac{20 - 15}{12} \right) \times 50$$

$$= 200 + \frac{5 \times 50}{12}$$

$$= 200 + \frac{250}{12}$$

$$= 200 + 20.83$$

$$= 220.83 \text{ Ans.}$$

34. निम्न आँकड़ों से बहुलक ज्ञात कीजिए:

वर्ग अंतराल	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारता	6	8	15	9	8

हल.

वर्ग अन्तराल (C.I.)	बारम्बारता (f_i)
10-20	6
20-30	8 = f_0
30-40	15 = f_1
40-50	9 = f_2
50-60	8

बहुलक वर्ग=30-40

$$l = 30, f_1 = 15$$

$$f_0 = 8, f_2 = 9$$

$$h = 10$$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

$$= 30 + \left(\frac{15 - 8}{2 \times 15 - 8 - 9} \right) \times 10$$

$$= 30 + \left(\frac{7 \times 10}{30 - 17} \right)$$

$$= 30 + \frac{70}{13}$$

$$= 30 + 5.38$$

$$= 35.38 \text{ Ans.}$$

35. निम्न आँकड़ों से माध्य ज्ञात कीजिए।:

वर्ग अंतराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारता	5	8	10	3	8	6

हल.

वर्ग अन्तराल (C.I.)	बारम्बारता (f_i)	वर्ग चिन्ह (x_i)	$f_i x_i$
0-10	5	5	25
10-20	8	15	120
20-30	10	25	250

30-40	3	35	105
40-50	8	45	360
50-60	6	55	330
योग	40		1190

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{1190}{40} = 29.75 \text{ Ans.}$$

36. निम्न आँकड़ों कि माध्यिका ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	10-25	25-40	40-55	55-70	70-85	85-100
बारंबारता	2	3	7	6	6	6

हल.

C.I.	f	cf
10-25	2	2
25-40	3	5
40-55	7	12=C
55-70	6=f	18
70-85	6	24
85-100	6	30
योग	N = 30	

$$\therefore N = 30$$

$$\therefore \frac{N}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$\text{माध्यिका वर्ग} = 55 - 70$$

$$l = 55, h = 15$$

$$f = 6, c = 12$$

$$\text{माध्यिका} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - c}{f} \right) \times h$$

$$= 55 + \left(\frac{15 - 12}{6} \right) \times 15$$

$$= 55 + \left(\frac{3 \times 15}{6} \right)$$

$$= 55 + \frac{15}{2}$$

$$= 55 + 7.5 = 62.5 \text{ Ans.}$$

37. निम्न आँकड़ों से माध्य ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
बारंबारता	8	6	12	11	13

हल.

C.I.	f_i	वर्ग चिन्ह (x_i)	$f_i x_i$
50-60	8	55	440
60-70	6	65	390
70-80	12	75	900
80-90	11	85	935
90-100	13	95	1235
योग	50		3900

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{3900}{50} = 78 \text{ Ans.}$$

38. निम्न आँकड़ों से बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30	30-36	36-42
बारंबारता	6	11	25	35	18	12	6

हल.

C.I.	F
0-6	6
6-12	11
12-18	25=f ₀
18-24	35=f ₁
24-30	18=f ₂
30-36	12
36-42	6

$$\text{बहुलक वर्ग} = 18-24$$

$$l=18, h=6,$$

$$f_1=35, f_0=25, f_2=18$$

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h$$

$$= 18 + \left(\frac{35 - 25}{2 \times 35 - 25 - 18} \right) \times 6$$

$$= 18 + \frac{10 \times 6}{(70 - 43)}$$

$$= 18 + \frac{60}{27}$$

$$= 18 + 2.22$$

$$= 20.22 \text{ Ans.}$$

39. निम्न आँकड़ों से माध्य ज्ञात कीजिए।

हल.

C.I.	f_i	वर्ग चिन्ह (x_i)	$f_i x_i$
0-20	17	10	170
20-40	28	30	840
40-60	32	50	1600
60-80	24	70	1680
80-100	19	90	1710
योग	120		6000

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\sum fixi}{\sum fi} = \frac{6000}{120} = 50 \text{ Ans.}$$

40. निम्न आँकड़ों कि माध्यिका ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारता	5	8	20	15	7	5

हल.

C.I.	f	cf
0-10	5	5
10-20	8	13=c
20-30	20=f	33
30-40	15	48
40-50	7	55
50-60	5	60
योग	N = 60	

$$N=60$$

$$\frac{N}{2} = 30$$

माध्यिका वर्ग = 20-30

$$l = 20, h = 10, f = 20, C = 13$$

$$\begin{aligned} \text{माध्यिका} &= l + \left(\frac{\frac{N}{2} - c}{f} \right) \times h \\ &= 20 + \left(\frac{30 - 13}{20} \right) \times 10 \\ &= 20 + \frac{17}{20} \times 10 \\ &= 20 + \frac{17}{2} \\ &= 20 + 8.5 = 28.5 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

41. निम्न आँकड़ों का माध्य 62.8 है, तब अज्ञात बारंबारता x ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
बारंबारता	5	8	X	12	7	8

हल.

C.I.	f_i	वर्ग चिन्ह (x_i)	$f_i x_i$
0-20	5	10	50
20-40	8	30	240
40-60	x	50	50x
60-80	12	70	840
80-100	7	90	630
100-120	8	110	880
योग	40+x		2640+50x

$$\begin{aligned} \text{माध्य} (\bar{x}) &= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \\ &= \frac{62.8}{1} = \frac{2640 + 50x}{40 + x} \\ &\Rightarrow 62.8(40 + x) = 2640 + 50x \\ &\Rightarrow 2512 + 62.8x = 2640 + 50x \\ &\Rightarrow 62.8x - 50x = 2640 - 2512 = 128 \\ &\Rightarrow 12.8x = 128 \\ &\Rightarrow \frac{128x}{10} = 128 \\ &\Rightarrow 128x = 128 \times 10 \\ &\Rightarrow x = \frac{128}{128} \times 10 \\ &\therefore x = 10 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

42. निम्न आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिये।

वर्ग अंतराल	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48
बारंबारता	8	10	16	24	15	7

हल.

C.I.	f	cf
0-8	8	8
8-16	10	18
16-24	16	34=c
24-32	24=f	58
32-40	15	73
40-48	7	80
योग	N = 80	

$$\therefore N = 80$$

$$\therefore \frac{N}{2} = 40$$

माध्यिका वर्ग = 24-32

$$l=24, h=8, f=24$$

$$c=34$$

$$\begin{aligned} \text{माध्यिका} &= l + \left(\frac{\frac{N}{2} - c}{f} \right) \times h \\ &= 24 + \left(\frac{40 - 34}{24} \right) \times 8 \\ &= 24 + \frac{6}{3} \\ &= 24 + 2 = 26 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

43. निम्न आँकड़ों कि बहुलक ज्ञात कीजिए।

वर्ग अंतराल	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65
बारंबारता	6	11	21	23	14	6

हल.

C.I.	fi
5-15	6
15-25	11
25-35	21=f ₀
35-45	23=f ₁
45-55	14=f ₂
55-65	5

बहुलक वर्ग = 35-45

l=35, h=10

f₁=23, f₀=21, f₂=14

$$\begin{aligned} \text{बहुलक} &= l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \right) \times h \\ &= 35 + \left(\frac{23 - 21}{2 \times 23 - 21 - 14} \right) \times 10 \\ &= 35 + \frac{2 \times 10}{46 - 35} \\ &= 35 + \frac{20}{11} \\ &= 35 + 1.81 \\ &= 36.81 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

44. निम्नांकित बंटन एक मोहल्ले के बच्चों के दैनिक जेब, खर्च दर्शाता है। यदि माध्य जेब खर्च ₹ 18 है तो लुप्त बारंबारता f ज्ञात कीजिए।

दैनिक जेब भत्ता (₹ में)	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
बच्चों की संख्या	7	6	9	13	f	5	4

हल.

C.I.	f _i	वर्ग चिन्ह (x _i)	f _i x _i
11-13	7	12	84
13-15	6	14	84
15-17	9	16	144
17-19	13	18	234
19-21	f	20	20f
21-23	5	22	110
23-25	4	24	96
योग	44+f		752+20f

$$\begin{aligned} \text{माध्य } (\bar{x}) &= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \\ \Rightarrow \frac{18}{1} &= \frac{752 + 20f}{44 + f} \\ \Rightarrow 752 + 20f &= 44 \times 18 + 18f \\ \Rightarrow 20f - 18f &= 792 - 752 \\ \Rightarrow 2f &= 40 \\ \therefore f &= \frac{40}{2} = 20 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

45. यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो, तो x और y के मान ज्ञात कीजिए।

दैनिक जेब भत्ता (₹ में)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	योग
बच्चों की संख्या	5	x	20	15	y	5	60

हल.

C.I.	f	cf
0-10	5	5
10-20	x	5 + x = c
20-30	20 = f	25 + x
30-40	15	40 + x
40-50	y	40 + x + y
50-60	5	45 + x + y
योग	N = 60	

दिया गया है:- माध्यिका = 28.5

पुनः,

$$\Sigma f_i = N = 45 + x + y$$

$$\Rightarrow 45 + x + y = 60$$

$$\Rightarrow x + y = 60 - 45$$

$$\therefore x + y = 15 \dots\dots\dots(1)$$

माध्यिका वर्ग = 20-30

l=20, h=10

c = 5 + x, f = 20

$$\text{माध्यिक} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - c}{f} \right) \times h$$

$$\Rightarrow 28.5 = 20 + \frac{\{30 - (5 + x)\}}{20} \times 10$$

$$\Rightarrow 28.5 - 20 = \frac{30 - 5 - x}{20} \times 10$$

$$\Rightarrow \frac{8.5}{1} = \frac{25 - x}{2}$$

$$\Rightarrow 8.5 \times 2 = 25 - x$$

$$\Rightarrow 17 = 25 - x$$

$$\therefore x = 25 - 17 = 8$$

समी० (1) से

$$\Rightarrow x + y = 15$$

$$\Rightarrow y = 15 - 8$$

$$\Rightarrow y = 7$$

$$\therefore x = 8 / \text{Ans.}$$

$$\therefore y = 7 / \text{Ans.}$$

(वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

प्रत्येक प्रश्न के लिए चार विकल्प दिए गए हैं। इनमें से सही विकल्प का चयन कीजिए:

Q 1. किसी घटना E के लिए $P(E) + P(E \text{ नहीं})$ का मान होता है:

- (a) 1 (b) 1.5
(c) 0 (d) 2

Q 2. निम्नलिखित में से कौन सी संख्या किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती ?

- (a) $\frac{2}{3}$ (b) -1.5
(c) 15% (d) 0.7

Q 3. यदि $P(E) = 0.05$ है, तो 'E नहीं' की प्रायिकता होगी:

- (a) 9.5 (b) 0.5
(c) 0.95 (d) 0.05

Q 4. वह घटना जिसका घटित होना निश्चित है, की प्रायिकता होती है:

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 0.6

Q 5. वह घटना जिसका घटित होना असंभव है, की प्रायिकता होती है:

- (a) 2 (b) -1
(c) 0 (d) 1

Q 6. एक सिक्का को उछालने पर एक चित आने की प्रायिकता होगी:

- (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$
(c) $\frac{3}{2}$ (d) 2

Q 7. किसी घटना की प्रायिकतासे बड़ी या उसके बराबर होती है।

- (a) 0 (b) -1
(c) 1 (d) 2

Q 8. दो खिलाड़ी संगीता और रेशमा टेनिस का एक मैच खेलते हैं ज्ञात है कि संगीता द्वारा मैच जीतने की प्रायिकता 0.62 है। रेशमा को जीतने की प्रायिकता क्या है ?

- (a) 0.62 (b) 0.28
(c) 0.38 (d) 1

Q 9. मान लीजिए हम एक पासे को एक बार फेंकते हैं। 4 से बड़ी संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

- (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{4}{3}$

Q 10. एक समान्य वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता होगी:

- (a) $\frac{53}{365}$ (b) $\frac{1}{365}$
(c) $\frac{1}{7}$ (d) $\frac{2}{7}$

वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के उत्तर

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	b	c	b	c	b	a	c	b	c

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

Q 11. घटना 'E' की प्रायिकता + घटना "E नहीं" की प्रायिकता=..... होता है।

Ans :- 1 (एक)

Q 12. किसी प्रयोग की सभी घटनाओं की प्रायिकताओं का योग..... होता है।

Ans :- 1 (एक)

Q 13. यदि $P(E) = 0.6$ हो, तो $P(E \text{ नहीं})$ का मान ज्ञात करें।

Ans :- $P(E \text{ नहीं}) = 1 - P(E)$
 $= 1 - 0.6$
 $= 0.4$

Q 14. किसी पासे को फेंकने पर अंक 5 के ऊपर के अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Ans :- 5 से ऊपर आने की प्रायिकता = $\frac{1}{6}$

Q 15. एक चित प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब एक सिक्के को एक बार उछाला जाता है।

Ans :- $P(\text{चित}) = \frac{1}{2}$

Q 16. एक थैले में 4 लाल और 6 काली गेंदें हैं। एक गेंद निकालने पर उसके काली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

Ans :- लाल गेंद = 4

काली गेंद = 6

कुल गेंद = $6 + 4 = 10$

$\therefore P(\text{काली गेंद}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ Ans.

Q 17. सविता और हमीदा दो मित्र हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों का जन्म दिन एक ही है? (लीप वर्ष को छोड़कर)

Ans : दोनों का जन्मदिन एक ही दिन होने की प्रायिकता = $\frac{1}{365}$

Q 18. सविता और हमीदा दो मित्र हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों के जन्म दिन भिन्न-भिन्न हो? (लीप वर्ष को छोड़कर)

Ans :- दोनों का जन्मदिन भिन्न-भिन्न होने की प्रायिकता = $\frac{364}{365}$

Q 19. एक थैले में केवल नींबू की महक वाली गोलियां हैं। मालिनी बिना थैले में झांके उसमें से एक गोली निकालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह निकाली गई गोली (i) संतरे की महक वाली है (ii) नींबू की महक वाली है।

Ans :- (i) 0

(ii) 1

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

Q 20. एक पासे को एक बार फेंका जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने को प्रायिकता ज्ञात करें।

(i) एक विषम संख्या (ii) एक सम संख्या

Ans :- $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(S) = 6$

$E_1 =$ विषम संख्या = $\{1, 3, 5\}$

$$n(E_1) = 3$$

$$E_2 = \text{सम संख्या} = \{2,4,6\}$$

$$n(E_2) = 3$$

$$(i) P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{Ans.}$$

$$(ii) P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Q 21. पीछे दो भिन्न-भिन्न सिक्कों को एक साथ उछालती है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह कम से कम एक चित प्राप्त करेगी।

$$\text{Ans: - } S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

$$n(S) = 4$$

$$E = \text{कम से कम एक चित} = \{HT, TH, HH\}$$

$$n(E) = 3$$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{4} \text{ Ans.}$$

Q 22. एक थैले में 5 लाल और 4 सफेद गेंदें हैं। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है। इसकी प्रायिकता क्या है कि निकाली गई गेंद (i) लाल हो (ii) लाल नहीं हो।

$$\text{Ans: - लाल गेंदों की संख्या} = 5$$

$$\text{सफेद गेंदों की संख्या} = 4$$

$$\text{कुल गेंदों की संख्या} = 5 + 4 = 9$$

$$i) P(\text{लाल}) = 5/9$$

$$ii) P(\text{लाल नहीं}) = 4/9$$

Q 23. अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता परिकलित कीजिए कि यह पत्ता (i) लाल रंग का बादशाह (ii) ईंट का बेगम होगी।

$$\text{Ans: - पत्तों की कुल संख्या} = 52$$

$$i) \text{ लाल रंग का बादशाह} = 2$$

$$\text{प्रायिकता} = 2/52 = 1/26$$

$$ii) \text{ ईंट का बेगम} = 1$$

$$\text{प्रायिकता} = 1/52$$

Q 24. 20 बल्बों के एक समूह में 4 बल्ब खराब हैं। इस समूह में से एक बल्ब यादृच्छया निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि बल्ब (i) खराब होगा (ii) खराब नहीं होगा।

$$\text{Ans: - बल्बों की कुल संख्या} = 20$$

$$\text{खराब बल्बों की संख्या} = 4$$

$$i) P(\text{खराब बल्ब}) = 4/20 = 1/5$$

$$ii) P(\text{खराब नहीं}) = 16/20 = 4/5$$

Q 25. एक बक्से में 3 नीले, 2 सफेद और 4 लाल कंचे हैं। यदि इस बक्से में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि यह कंचा (i) सफेद है (ii) सफेद नहीं है।

$$\text{Ans: - कंचों की कुल संख्या} = 3 + 2 + 4 = 9$$

$$i) P(\text{सफेद कंचे}) = 2/9$$

$$ii) P(\text{सफेद नहीं}) = 7/9$$

Q 26. एक डिब्बे में 5 लाल कंचे, 8 सफेद कंचे और 4 हरे कंचे हैं। इस डिब्बे में से एक कंचा यादृच्छया निकाला जाता है इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाला गया कंचा

(i) लाल है ?

(ii) सफेद है?

(iii) हरा नहीं है?

$$\text{Ans: - कंचों की कुल संख्या} = 5 + 8 + 4 = 17$$

$$i) P(\text{लाल कंचे}) = 5/17 \text{ Ans.}$$

$$ii) P(\text{सफेद कंचे}) = 8/17 \text{ Ans.}$$

$$iii) P(\text{हरा नहीं}) = 13/17 \text{ Ans.}$$

Q 27. एक पेटी में 90 डिस्क हैं जिन पर 1 से 90 तक संख्याएं अंकित हैं। यदि इस पेटी में से एक डिस्क यादृच्छया निकाली जाती है तो उसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस डिस्क पर अंकित होगी।

(i) दो अंकों की एक संख्या

(ii) 5 से विभाज्य संख्या।

$$\text{Ans: - } n(S) = 90$$

$$i) n(E_1) = \text{दो अंकों की संख्या} = 90 - 9 = 81$$

$$P(E_1) = 81/90 = 9/10 \text{ Ans.}$$

$$ii) n(E_2) = \text{पांच से विभाज्य होने वाली संख्या} = 18$$

$$P(E_2) = 18/90 = 1/5 \text{ Ans.}$$

Q 28. 144 बॉल पेनों के समूह में 20 बॉलपेन खराब हैं और शेष अच्छे हैं। आप वही पेन खरीदना चाहेंगे जो अच्छा हो परंतु खराब पेन आप नहीं खरीदना चाहेंगे। दुकानदार इन पेनों में से यादृच्छया एक पेन निकालकर आपको देता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि:

(i) आप वह पेन खरीदेंगे (ii) आप वह पेन नहीं खरीदेंगे।

$$\text{Ans: - बॉल पेनों की कुल संख्या} = 144$$

$$\text{खराब बॉल पेनों की संख्या} = 20$$

$$i) \text{ बॉल पेन खरीदने की प्रायिकता} = 124/144 = \frac{31}{36} \text{ Ans.}$$

$$ii) \text{ बॉल पेन नहीं खरीदने की प्रायिकता} = 20/144 = \frac{5}{36} \text{ Ans.}$$

Q 29. अच्छी प्रकार से फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसकी प्रायिकता परिकलित करें कि यह पत्ता- (i) एक इक्का होगा। (ii) एक इक्का नहीं होगा।

$$\text{Ans: - पत्तों की कुल संख्या} = 52.$$

$$i) \text{ इक्कों की संख्या} = 4$$

$$P(\text{इक्का}) = 4/52 = 1/13 \text{ Ans.}$$

$$ii) P(\text{इक्का नहीं}) = 48/52 = 12/13 \text{ Ans.}$$

Q 30. एक बच्चे के पास ऐसा पासा है जिसके फलकों पर निम्नांकित अक्षर अंकित हैं -

A, B, C, D, E, A

एक पासे को एक बार फेंका जाता है इसकी क्या प्रायिकता है कि (i) A प्राप्त हो ? (ii) D प्राप्त हो ?

$$\text{Ans: - अक्षरों की कुल संख्या} = 6$$

$$A \text{ प्राप्त होने का प्रायिकता} = 2/6 = 1/3 \text{ Ans.}$$

$$D \text{ प्राप्त होने का प्रायिकता} = 1/6 \text{ Ans.}$$

Q 31. एक खेल में एक रुपए के सिक्के को तीन बार उछाला जाता है और प्रत्येक बार का परिणाम लिख लिया जाता है। तीनों परिणाम समान होने पर अर्थात् तीन चिट या तीन पट प्राप्त होने पर हनीफ खेल में जीत जाएगा, अन्यथा वह हार जाएगा। हनीफ के खेल में हार जाने की प्रायिकता परिकलित कीजिए।

$$\text{Ans: -}$$

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

$$\therefore n(S) = 8$$

E (हारने का परिणाम) = {HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

$$\therefore n(E) = 6$$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$\therefore P(E) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ Ans.}$$

Q 32. एक पासे को दो बार फेंका जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि (i) 5 किसी भी बार में नहीं आएगा? (ii) 5 कम से कम एक बार आएगा?

Ans:- परिणामों की कुल संख्या = $6 \times 6 = 36$

(i) $n(E_1) = 5$ किसी भी बार नहीं आने की संख्या = 25

$$P(E_1) = 25/36$$

(ii) $n(E_2) = 5$ कम से कम एक बार आने की संख्या = 11

$$P(E_2) = 11/36$$

Q 33. एक सलेटी पासे और एक नीले पासे को एक साथ फेंका जाता है। सभी संभावित परिणामों को लिखिए। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों पासों की संख्याओं का योग (i) 8 है (ii) 13 है (iii) 12 से छोटी या उसके बराबर है।

33 Ans : -

	सलेटी					
	1	2	3	4	5	6
नीला	1 (1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2 (2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	
3 (3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	
4 (4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	
5 (5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	
6 (6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	

परिणामों की संख्या, $n(s) = 36$

i) E द्वारा व्यक्त घटना 'संख्याओं के योग 8 है' के अनुकूल परिणाम (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) है।

अनुकूल परिणामों की संख्या $n(E) = 5$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

ii) F द्वारा व्यक्त घटना 'संख्याओं का योग 13 है' के अनुकूल कोई परिणाम नहीं है।

अनुकूल परिणामों की संख्या = 0

$$P(F) = \frac{0}{36} = 0$$

iii) G द्वारा व्यक्त घटना 'संख्याओं की योग 12 से छोटा या उसके बराबर हो' के अनुकूल सभी परिणाम हैं।

अनुकूल परिणामों की संख्या = 36.

$$P(G) = \frac{36}{36} = 1$$

गणित/ MATHEMATICS

बहुवैकल्पिक प्रश्नोत्तर

समय : 1 घंटा 30 मिनट

पूर्णांक : 40

Time : 1 Hr. 30 Min.

Full Marks : 40

- इस विषय की दो प्रश्न पुस्तिकाएँ हैं। प्रश्न पुस्तिका -(A) बहुविकल्पीय प्रश्न हैं तथा प्रश्न पुस्तिका -(B) विषयनिष्ठ प्रश्न (प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका) हैं।
- प्रश्न पुस्तिका -(A) के बहुविकल्पीय प्रश्नों के उत्तर आपको पहले हल करना है तथा उसके उपरान्त आप प्रश्न पुस्तिका -(B) (प्रश्न सह उत्तर पुस्तिका) को हल करेंगे परीक्षार्थी को 11:20 पूर्वाह्न से 11:25 पूर्वाह्न की अवधि में प्रश्न पुस्तिका-(B) उपलब्ध कराया जाएगा।
- This subject consists of two Question Booklets. Question Booklet- (A) is of MCQ type of question and Question Booklet-(B) is of Subjective type of question (question-cum-answer booklet).
- Question Booklet-(A) MCQ Type has to be answered first and then Question Booklet-(B) (Question-cum-Answer Booklet). Question Booklet-(B) will be provided to candidate between 11:20 A.M to 11:25 A.M.

सामान्य निर्देश / GENERAL INSTRUCTIONS :

1. प्रश्न पुस्तिका (A) बहुविकल्पीय प्रश्न पर आधारित है। परीक्षार्थी सर्वप्रथम इसका उत्तर हल करेंगे।

समय - 9:45 पूर्वाह्न से 11:20 पूर्वाह्न।

This Question Booklet-(A) is of MCQ Type of questions. The candidate must answer this Booklet first.

Time-9:45 A.M. to 11:20 A.M.

2. सावधानी पूर्वक सभी विवरण OMR उत्तर पत्रक पर भरें।
Carefully fill up the necessary particulars on the OMR Answer Sheet.
3. आप अपना पूरा हस्ताक्षर OMR उत्तर पत्रक में दी गई जगह पर करें।
Put your full signature on the OMR Answer Sheet in the space provided.
4. इस प्रश्न पुस्तिका में कुल 40 बहु-विकल्पीय प्रश्न हैं।
There are 40 Multiple Choice Questions in this Question Booklet.
5. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न की अधिमानता 1 अंक निर्धारित है।
All questions are compulsory. Each question carries 1 mark.
6. गलत उत्तर के लिए कोई अंक नहीं काटा जाएगा।
There is no negative marking for any wrong answer.

7. OMR उत्तर पत्रक के पृष्ठ 2 पर प्रदत्त सभी निर्देशों को ध्यानपूर्वक पढ़ें तथा उसके अनुसार कार्य करें।

Read the instructions provided on page 2 of the OMR Answer Sheet carefully and do accordingly.

8. प्रत्येक प्रश्न में चार विकल्प दिये गये हैं। इनमें से सबसे उपयुक्त उत्तर को आप अपने OMR उत्तर पत्रक पर ठीक-ठीक गहरा काला करें। नीला या काला बॉल प्वाइंट कलम का ही प्रयोग करें। पेंसिल का प्रयोग वर्जित है।

Four options are given for each question. You have to darken duly the most suitable answer on your OMR Answer Sheet. Use only Blue or Black Ball-Point Pen. The use of Pencil is not allowed.

9. रफ़ कार्य हेतु प्रश्न पुस्तिका के अंत में दिये गये पृष्ठ का ही प्रयोग कीजिए। OMR उत्तर पत्रक पर कोई रफ़ कार्य न करें।

Use the page given at the end of the question booklet for Rough Work. Do not do any Rough Work on the OMR Answer Sheet.

10. कृपया OMR उत्तर पत्रक पर प्रश्न पुस्तिका (A) के उत्तर देने के बाद OMR उत्तर पत्रक वीक्षक को लौटा दीजिये प्रश्न पुस्तिका (A) आप अपने साथ ले जा सकते हैं।

After answering Question Booklet-(A) in the OMR Answer Sheet, please hand over the OMR Answer Sheet to the invigilator. You are allowed to take the Question Booklet-(A) with you.

OMR उत्तर पत्रक पर दिये गये निर्देशों का ध्यानपूर्वक पालन कीजिए अन्यथा आपका OMR उत्तर पत्रक अमान्य होगा और उसकी जाँच नहीं की जायेगी।

Adhere to the instructions provided in the OMR Answer Sheet very carefully otherwise your OMR Answer Sheet will be invalid and it will not be evaluated.

OBJECTIVE QUESTION

1. 5005 का अभाज्य गुणनखण्ड है

- (1) $6 \times 7 \times 11 \times 13$ (2) $5 \times 7 \times 11 \times 7 \times 13$
 (3) $5 \times 7 \times 11 \times 13$ (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. (3)

2. यदि विभाजन ऐलोरिथ्म $a = bq + r$ में $a = 72$, $q = 8$ और $r = 0$ है तो b का मान होगा

- (1) 0 (2) 8
 (3) 9 (4) 72

Ans. (3)

3. $3\sqrt{2}$ एक संख्या है।

- (1) परिमेय (2) अपरिमेय
 (3) पूर्णांक (4) प्राकृत

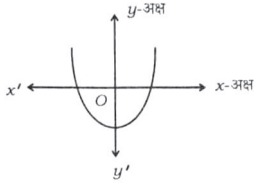
Ans. (2)

4. $\frac{35}{50}$ का दशमलव प्रसार कैसा है?

- (1) सांत (2) असांत आवर्ती
 (3) असांत अनावर्ती (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. (1)

5. $y = p(x)$ का ग्राफ दिया गया है। बहुपद $p(x)$ के शून्यकों की संख्या है



- (1) 0 (2) 1
 (3) 2 (4) 3

Ans. (3)

6. बहुपद $x^2 - 15$ का शून्यक है

- (1) $\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (2) $-\sqrt{15}, -\sqrt{15}$
 (3) $-\sqrt{15}, \sqrt{15}$ (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. (3)

7. यदि बहुपद $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक a और b हों तो $a+b$ का मान है

- (1) 8 (2) -8
 (3) 2 (4) -2

Ans. (3)

8. जब दो चर वाले रैखिक समीकरणों का आलेख प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं, तब उनके हल होंगे

- (1) एक (2) दो
 (3) तीन (4) अनगिनत

Ans. (1)

9. समीकरण निकाय $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ का अनन्त हल होंगे, यदि

(1) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

(2) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(3) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(4) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

Ans. (3)

10. रैखिक समीकरण युग्म $2x + y = 5$ और $3x + 2y = 8$ का हल है

- (1) $x = 2, y = -1$ (2) $x = -2, y = 1$
 (3) $x = 2, y = 1$ (4) $x = -2, y = -2$

Ans. (3)

11. समीकरण निकाय $4x + py + 8 = 0$ और $2x + 2y + 2 = 0$ के अद्वितीय हल होने के लिए p का मान है

- (1) $p = 4$ (2) $p = -4$
 (3) $p \neq 4$ (4) $p \neq -4$

Ans. (3)

12. निम्न में से कौन द्विघात समीकरण है?

- (1) $(x+1)^2 = -2(x-3)$
 (2) $(x+2)^2 = 2x(x^2-1)$
 (3) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$
 (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. (1)

13. द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 6 = 0$ का विविक्तकर बराबर है

- (1) 2 (2) -3
 (3) 1 (4) 3

Ans. (3)

14. यदि द्विघात समीकरण $x^2 - px + 4 = 0$ के मूल बराबर हों, तो p का मान होगा

- (1) ± 3 (2) ± 4
 (3) ± 5 (4) ± 2

Ans. (2)

15. द्विघात समीकरण $x^2 + 5x - 6 = 0$ का घात होगा

- (1) 0 (2) 1
 (3) 2 (4) 3

Ans. (3)

16. A.P. 0.6, 1.7, 2.8, 3.9, का सार्व अंतर है

- (1) 1.1 (2) 11
 (3) 0.6 (4) 6

Ans. (1)

17. A.P. 10, 7, 4, ... का 30 वाँ पद है

- (1) 97 (2) 77
 (3) -77 (4) -87

Ans. (3)

18. $2 + 7 + 12 + \dots + 10$ पदों का योग है

- (1) 225 (2) 235
(3) 245 (4) 255

Ans. (3)

19. सभी वर्ग होते हैं

- (1) समरूप (2) सर्वांगसम
(3) (1) और (2) दोनों (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. (1)

20. ΔABC में D एवं E क्रमशः AB और AC पर दो बिन्दु हैं तथा $DE \parallel BC$ है। यदि $AD : DB = 2 : 3$ और $AE = 1.6$ cm तो EC का मान क्या होगा ?

- (1) 1.2 सेमी (2) 4.8 सेमी
(3) 2.4 सेमी (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. (3)

21. यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ और $BC : EF = 3 : 5$, तो $ar(\Delta ABC) : ar(\Delta DEF)$ बराबर है

- (1) 9 : 5 (2) 3 : 5
(3) 9 : 15 (4) 9 : 25

Ans. (4)

22. बिन्दुओं $P(0, 0)$ और $Q(-3, -4)$ के बीच की दूरी है

- (1) 2 इकाई (2) 3 इकाई
(3) 4 इकाई (4) 5 इकाई

Ans. (4)

23. बिन्दुओं $(1, 2)$ और $(3, 4)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु है

- (1) $(1, 4)$ (2) $(2, 3)$
(3) $(4, 1)$ (4) $(3, 2)$

Ans. (2)

24. यदि $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 1)$ तो ΔABC का क्षेत्रफल होगा

- (1) 3 (2) 4
(3) 2 (4) 1

Ans. (3)

25. यदि $\cos A = \frac{3}{5}$, तो $\operatorname{cosec} A$ बराबर है:

- (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{5}{4}$
(3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{5}{3}$

Ans. (2)

26. यदि $2 \sin A = \sqrt{3}$, तो A का मान है

- (1) 30° (2) 45°
(3) 60° (4) 90°

Ans. (3)

27. $\cot(90^\circ - A)$ बराबर है

- (1) $\operatorname{cosec} A$ (2) $\cos A$
(3) $\tan A$ (4) $\sec A$

Ans. (3)

28. $\sin^2 A + \cos^2 A$ का मान है

- (1) -1 (2) 1
(3) -2 (4) 2

Ans. (2)

29. एक मीनार के शीर्ष का उन्नयन कोण उसके पाद से 15 m की दूरी पर 60° है, तो मीनार की ऊँचाई है

- (1) 20 m (2) $15\sqrt{3}$ m
(3) $25\sqrt{3}$ m (4) 15 m

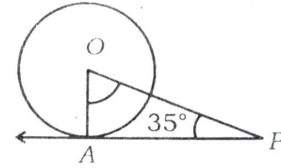
Ans. (2)

30. किसी वृत्त पर बाह्य बिन्दु से खींची गई स्पर्श रेखाओं की संख्या होगी

- (1) 4 (2) 3
(3) 2 (4) 1

Ans. (3)

31. दी गई आकृति में यदि $\angle LOPA = 35^\circ$, तो $\angle LAOP$ का मान होगा



- (1) 55° (2) 45°
(3) 60° (4) 65°

Ans. (1)

32. यदि एक बिन्दु P से O केन्द्र वाले किसी वृत्त पर PA एवं PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर झुकी हों, तो $\angle POA$ बराबर है

- (1) 50° (2) 60°
(3) 70° (4) 80°

Ans. (1)

33. निम्न में से कौन वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र है ?

- (1) πr^2 (2) $2\pi r^2$
(3) $3\pi r^2$ (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. (1)

34. यदि किसी अर्धवृत्ताकार खेत की त्रिज्या 7 cm है, तो उसका परिमाप है

- (1) 22 cm (2) 36 cm
(3) 44 cm (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. (2)

35. 42 cm त्रिज्या वाले वृत्त के उस त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल क्या होगा जिसका कोण 120° है?

- (1) 1838 cm^2 (2) 1848 cm^2
(3) 1858 cm^2 (4) इनमें से कोई नहीं

Ans. (2)

36. घनाभ के कोरों की लम्बाई क्रमशः 3 cm 4 cm एवं 12 cm हैं, तो घनाभ के विकर्ण की लम्बाई है

- (1) 12 cm (2) 13 cm
(3) 14 cm (4) 15 cm

Ans. (2)

37. प्रथम तीन लगातार प्राकृत संख्याओं का माध्य होगा

- (1) 1 (2) 2
(3) 3 (4) 4

Ans. (2)

38. संचयी बारंबारता वक्र कहलाती है

- (1) तोरण (2) आयत चित्र
(3) दंडालेख (4) बारंबारता बहुभुज

Ans. (1)

39. किसी पासे को फेंकने पर सम संख्या आने की प्रायिकता है

- (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$
(3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

Ans. (4)

40. निम्न में से कौन सी किसी घटना की प्रायिकता नहीं हो सकती ?

- (1) 0.8 (2) 2.5
(3) 80% (4) $\frac{5}{6}$

Ans. (2)

Jharkhandlab.com

गणित/ MATHEMATICS

विषयनिष्ठ प्रश्नोत्तर

समय : 1 घंटा 30 मिनट

पूर्णांक : 40

Time : 1 Hr. 30 Min.

Full Marks : 40

सामान्य निर्देश :

GENERAL INSTRUCTIONS :

1. प्रश्न पुस्तिका - (B) के प्रश्न विषयनिष्ठ है। यह प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका है। प्रश्न पुस्तिका - (A) (बहुवैकल्पिक) का उत्तर देने के बाद ही परीक्षार्थी प्रदत्त स्थान पर प्रश्न-सह उत्तर पुस्तिका। [प्रश्न पुस्तिका - (B)] में उत्तर दें।

Questions Booklet-(B) is of Subjective type. It is Question-cum-Answer Booklet. The candidate has to answer the Question-cum-Answer Booklet [Question Booklet-(B)] in the space provided only after answering the **Question Booklet-(A)** (MCQ Type).

2. परीक्षार्थी यथासंभव अपने शब्दों में ही उत्तर दें।

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

3. दाहिनी ओर हाशिए पर दिए हुए अंक पूर्णांक निर्दिष्ट करते हैं।

Figures in the right-hand margin indicate full marks.

4. यह प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका तीन खंडों में है, खण्ड-A, खण्ड-B, एवं खण्ड-C और कुल प्रश्नों की संख्या 19 है।

This Questions-cum-Answer Booklet is divided into three sections: Section-A, Section-B and Sections-C and the total number of questions is 19.

5. खण्ड-A में 7 अति लघु उत्तरीय प्रश्न हैं, जिनमें से किन्हीं 5 प्रश्नों के उत्तर देना अनिवार्य है। खण्ड-B में 7 लघु उत्तरीय प्रश्न हैं, जिनमें से किन्हीं 5 प्रश्नों के उत्तर देना अनिवार्य है। खण्ड-C में 5 दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं जिनमें से किन्हीं 3 प्रश्नों के उत्तर देना अनिवार्य है।

In Section-A, there are 7 very short answer questions out of which any 5 questions are to be answered. In Section-B, there are 7 short answer questions, out of which any 5 questions are to be answered. In Section-C, there are 5 long answer questions, out of which any 3 questions are to be answered.

6. रचना के उत्तर में केवल अंकन दें।

Only sketches are to be given in the answers of construction.

7. सभी रफ कार्य प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका के अंत में दिए गए पृष्ठ पर ही कीजिए, अन्यत्र कहीं नहीं।

Do all rough work only on the last page of the Question-cum-Answer Booklet and nowhere else.

8. परीक्षा के उपरांत प्रश्न पुस्तिका-(B) (प्रश्न-सह-पुस्तिका) वीक्षक को लौटा दीजिए।

After the completion of the examination hand over the **Question Booklet-(B)** (Question-cum-Answer Booklet) to the invigilator.

SUBJECTIVE QUESTION

Section - A

1. अभाज्य गुणखंड विधि द्वारा 510 और 92 का HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल:-

2	510
3	255
5	85
	17

2	92
2	46
	23

$$510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$$

$$92 = 2^2 \times 23$$

$$\text{HCF}(510, 92) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{LCM}(510, 92) &= 2^2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 23 \\ &= 23,460. \end{aligned}$$

2. बहुपद $p(x) = 3x^2 + 7x - 6$ को बहुपद $g(x) = x + 3$ से भाग दीजिए तथा भागफल एवं शेषफल लिखिए।

हल:- $p(x) = 3x^2 + 7x - 6$

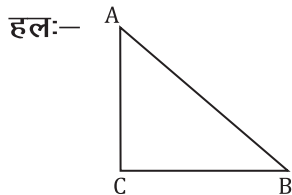
$$g(x) = x + 3$$

$$\begin{array}{r} x+3 \overline{) 3x^2 + 7x - 6} \quad (3x-2) \\ \underline{3x^2 + 9x} \\ (-) -2x - 6 \\ \underline{-2x - 6} \\ (+) 0 \end{array}$$

$$\text{भागफल} = 3x - 2$$

$$\text{शेषफल} = 0$$

3. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है। यदि $AB^2 = 2AC^2$ है, तो सिद्ध किजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।



दिया है :- ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है तथा $AB^2 = 2AC^2$

सिद्ध करना है :- ABC एक समकोण त्रिभुज है।

प्रमाण:-

$$\therefore AB^2 = 2AC^2 \quad (\text{दिया है})$$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + AC^2$$

$$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad (\because AC = BC)$$

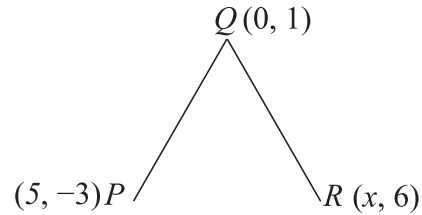
पाइथागोरस प्रमेय के विलोम से,

$$\angle ACB = 90^\circ$$

अतः ABC एक समकोण त्रिभुज है। Proved.

4. यदि $Q(0, 1)$, बिन्दुओं $P(5, -3)$ और $R(x, 6)$ से समदूरस्थ है तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल:-



\therefore बिन्दु $Q(0, 1)$ बिन्दुओं $P(5, -3)$ तथा $R(x, 6)$ से समदूरस्थ है।

$$\therefore PQ = QR$$

$$\therefore PQ^2 = QR^2$$

$$\therefore (5-0)^2 + (-3-1)^2 = (x-0)^2 + (6-1)^2$$

$$\therefore 5^2 + (-4)^2 = x^2 + 5^2$$

$$\therefore 25 + 16 = x^2 + 25$$

$$\therefore x^2 = 16$$

$$\therefore x = \pm 4$$

5. मान निकालिए: $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

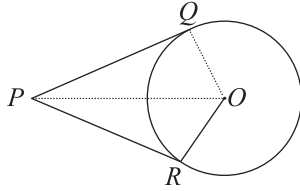
हल:- $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

6. सिद्ध किजिए कि बाह्य बिन्दु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।

हल:-



दिया है :- माना O केंद्र वाला एक वृत्त है, जिसके बाहर स्थित बिंदु P से दो स्पर्श रेखाएँ PQ तथा PR है।

सिद्ध करना है :- $PQ = PR$

रचना:- $O - P$, $O - Q$ तथा $O - R$ को मिलाया।

प्रमाण:-

∴ हम जानते हैं कि स्पर्श बिंदु पर खींची गई त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लंब होती है।

$$\therefore \angle OQP = \angle ORP = 90^\circ \dots\dots\dots(i)$$

ΔOQP तथा ΔORP में

$$OQ = OR \quad (\text{वृत्त की त्रिज्याएँ})$$

$$\angle OQP = \angle ORP \quad (\text{समीकरण (i) से})$$

$$PO = PO \quad (\text{उभयनिष्ठ भुजा})$$

RHS सर्वांगसमता की कसौटी से

$$\Delta OQP \cong \Delta ORP$$

$$\therefore PQ = PR \quad (\text{C.P.C.T})$$

$$\therefore PQ = PR. \quad \text{Proved.}$$

7. काजल एक सिक्के को एक बार उछालती है। निम्न को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए: (a) एक चित्त (b) एक पट

हल:- परिणामों की कुल संख्या = 2

$$(i) P(\text{एक चित}) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम की संख्या}}{\text{परिणामों की कुल संख्या}}$$

$$\therefore P(\text{एक चित}) = \frac{1}{2} .$$

$$(ii) P(\text{एक पट}) = \frac{\text{अनुकूल परिणाम की संख्या}}{\text{परिणामों की कुल संख्या}}$$

$$\therefore P(\text{एक पट}) = \frac{1}{2} .$$

Section - B

8. 124 और 148 का HCF यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

हल:-

$$\begin{array}{r} 124 \overline{)148(1} \\ \underline{124} \\ 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \overline{)124(5} \\ \underline{120} \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{)24(6} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore 148 > 124$$

∴ $a = 148$ तथा $b = 124$ लेकर यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करने पर,

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

∴ शेषफल $24 \neq 0$ है, इसलिए 124 और 24 के लिए यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करने पर,

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

∴ शेषफल $4 \neq 0$ है, इसलिए 24 और 4 के लिए यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करने पर,

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

∴ शेषफल 0 प्राप्त हुआ।

$$\therefore \text{HCF}(124, 148) = 4.$$

9. ग्राफीय विधि से हल कीजिए:-

$$2x + y - 6 = 0 \text{ और } 2x - y - 2 = 0.$$

$$\text{हल:- } 2x + y - 6 = 0 \dots\dots\dots(i)$$

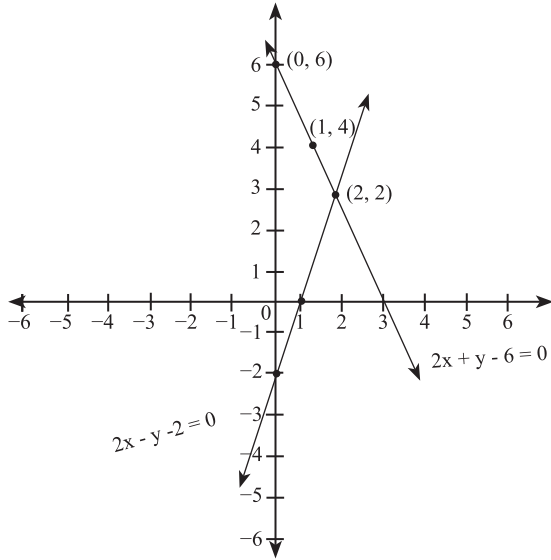
$$2x - y - 2 = 0 \dots\dots\dots(ii)$$

$2x + y - 6 = 0$ के लिए

x	1	2	0
y	4	2	6

$2x - y - 2 = 0$ के लिए

x	1	2	0
y	0	2	-2



∴ समीकरणों को निरूपित करने वाली रेखाएँ एक दूसरे को बिंदु (2, 2) पर प्रतिच्छेद करती हैं।

$$\therefore x = 2 \quad \text{Ans.}$$

$$\therefore y = 2$$

10. एक A.P में $a = 7$ और $a_{13} = 35$ दिया है। d और s_{13} ज्ञात किजिए।

हल:— ∴ $a = 7$

$$a_{13} = 35$$

$$d = ?$$

$$s_{13} = ?$$

∴ $a_{13} = 35$ (दिया है)

$$\Rightarrow a + 12d = 35$$

$$\Rightarrow 7 + 12d = 35$$

$$\Rightarrow 12d = 35 - 7$$

$$\Rightarrow d = \frac{28}{12}$$

$$\therefore d = \frac{7}{3}$$

अब,

$$s_n = \frac{n}{2} [a + a_n]$$

$$\therefore s_{13} = \frac{13}{2} [a + a_{13}]$$

$$\therefore s_{13} = \frac{13}{2} [7 + 35]$$

$$\therefore s_{13} = \frac{13}{2} \times 42$$

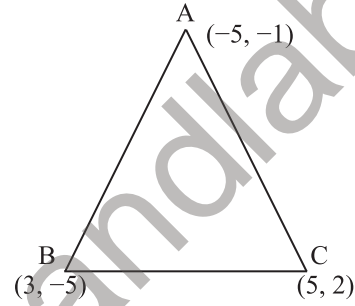
$$\therefore s_{13} = 273$$

$$\text{अतः } d = \frac{7}{3} \quad \text{Ans.}$$

$$s_{13} = 273$$

11. त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात किजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक $(-5, -1)$, $(3, -5)$ और $(5, 2)$ हैं।

हल:—



यहाँ

$$x_1 = -5, \quad y_1 = -1$$

$$x_2 = 3, \quad y_2 = -5$$

$$x_3 = 5, \quad y_3 = 2$$

ΔABC का क्षेत्रफल =

$$= \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [-5(-5 - 2) + 3(2 - (-1)) + 5(-1 - (-5))]$$

$$= \frac{1}{2} [-5 \times (-7) + 3 \times (2 + 1) + 5(-1 + 5)]$$

$$= \frac{1}{2} [35 + 3 \times 3 + 5 \times 4]$$

$$= \frac{1}{2} [35 + 9 + 20]$$

$$= \frac{1}{2} \times 64 = 32 \text{ वर्ग मात्रक}$$

अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल 32 वर्ग मात्रक है।

12. सिद्ध कीजिए: $\frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

हल: L.H.S

$$= \frac{\cos A}{1 + \sin A} + \frac{1 + \sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A + (1 + \sin A)^2}{(1 + \sin A) \cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A + 1^2 + 2 \times 1 \times \sin A + \sin^2 A}{(1 + \sin A) \cos A}$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A) + 1 + 2 \sin A}{(1 + \sin A) \cos A}$$

$$= \frac{1 + 1 + 2 \sin A}{(1 + \sin A) \cos A} \quad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$$

$$= \frac{2 + 2 \sin A}{(1 + \sin A) \cos A}$$

$$= \frac{2(1 + \sin A)}{(1 + \sin A) \cos A}$$

$$= 2 \times \frac{1}{\cos A}$$

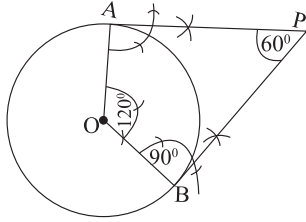
$$= 2 \sec A \quad [\because \frac{1}{\cos A} = \sec A]$$

$$= \text{R.H.S}$$

$\therefore \text{L.H.S} = \text{R.H.S}$ Proved.

13. 5 cm त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाएँ खींचीए जो परस्पर 60° के कोण पर झुकी हो।

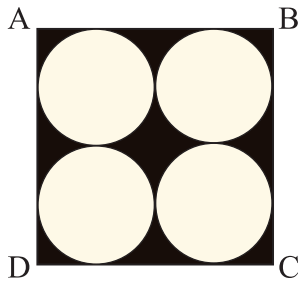
हल:-



PA और PB अभीष्ट स्पष्ट रेखा का युग्म है।

14. आकृति में छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ ABCD भुजा 14cm का एक वर्ग है।

हल:-



वर्ग ABCD में,

$$AB = BC = CD = AD = 14 \text{ cm}$$

$$\text{प्रत्येक वृत्त का व्यास } (d) = \frac{14}{2}$$

$$= 7 \text{ cm.}$$

$$\text{प्रत्येक वृत्त की त्रिज्या } (r) = \frac{7}{2} \text{ cm.}$$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल =

वर्ग ABCD का क्षेत्रफल - 4 × वृत्त का क्षेत्रफल

$$= (AB)^2 - 4 \times \pi r^2$$

$$= (14)^2 - 4 \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

$$= 196 - 154$$

$$= 42 \text{ cm}^2$$

अतः छायांकित भाग का क्षेत्रफल 42 cm^2 है।

Section - C

15. द्विघात समीकरण $3x^2 - 5x + 2 = 0$ का विविक्तकर, मूलों की प्रकृति तथा द्विघाती सूत्र का उपयोग कर मूल ज्ञात करें।

हल:- दिया गया समीकरण है:

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

यहाँ $a = 3$, $b = -5$ तथा $c = 2$ है।

$$\therefore \text{विविक्तकर } (D) = b^2 - 4ac$$

$$\therefore D = (-5)^2 - 4(3)(2)$$

$$\therefore D = 25 - 24$$

$$\therefore D = 1$$

$$\therefore D > 0$$

\therefore दिए गए द्विघात समीकरण के दो भिन्न वास्तविक मूल हैं।

\therefore हम जानते हैं कि

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \times 3}$$

$$\therefore x = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$\therefore \alpha = \frac{5+1}{6} \text{ तथा } \beta = \frac{5-1}{6}$$

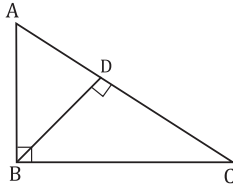
$$\therefore \alpha = 6/6 \text{ तथा } \beta = 4/6$$

$$\therefore \alpha = 1 \text{ तथा } \beta = 2/3$$

अतः अभीष्ट मूल 1 तथा $2/3$ है।

16. सिद्ध किजिए कि एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

हल:—



दिया गया है:— ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC = 90^\circ$

सिद्ध करना है:— $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना:— $BD \perp AC$ खींचा।

प्रमाण:—

$\triangle ADB$ और $\triangle ABC$ में

$\angle A = \angle A$ (उभयनिष्ठ कोण)

$\angle ADB = \angle ABC = 90^\circ$

\therefore AA समरूपता की कसौटी से,

$\triangle ADB \sim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DB}{BC} = \frac{AB}{AC} \quad (\text{समरूप त्रिभुज के संगत भुजा})$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC} \quad [\text{पहला और अंतिम पद को लेने पर}]$$

$$\therefore AB^2 = AD \times AC \quad \dots\dots\dots(1)$$

पुनः

$\triangle BDC$ और $\triangle ABC$ में

$\angle BDC = \angle ABC = 90^\circ$

$\angle C = \angle C$ (उभयनिष्ठ कोण)

AA समरूपता की कसौटी से

$\triangle BDC \sim \triangle ABC$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC} \quad (\text{समरूप त्रिभुज के संगत भुजा})$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{BC}{AC} \quad [\text{दूसरा और अंतिम पद लेने पर}]$$

$$\therefore BC^2 = DC \times AC \quad \dots\dots\dots(2)$$

समीकरण (1) तथा समीकरण (2) को जोड़ने पर

$$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$$

$$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = (AD + DC) \times AC$$

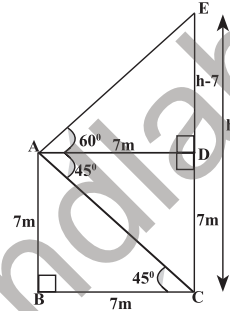
$$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC \times AC$$

$$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$$

Hence Proved.

17. 7m ऊँचे भवन के शिखर से एक केबल टॉवर के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और इनके पाद का अवनयन कोण 45° है। केबल टॉवर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल:—



माना AB एक 7cm ऊँचा भवन है तथा CE केबल टॉवर है।

पुनः,

माना, केबल टॉवर की ऊँचाई = h m

तो ED = (h - 7)m.

अब,

$\triangle ABC$ में

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \tan 45^\circ$$

$$\therefore \frac{7}{BC} = 1$$

$$\therefore BC = 7m.$$

चतुर्भुज ABCD में

$$BC = AD = 7m \dots\dots\dots(1)$$

पुनः,

$\triangle ADE$ में,

$$\therefore \frac{ED}{AD} = \tan 60^\circ$$

$$\therefore \frac{h-7}{7} = \sqrt{3} \quad (\text{समी० 1})$$

$$\therefore h-7 = 7\sqrt{3}$$

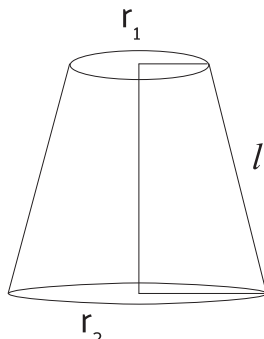
$$\therefore h = 7 + 7\sqrt{3}$$

$$\therefore h = 7(1 + \sqrt{3})m.$$

अतः केबल टॉवर की ऊँचाई $7(1 + \sqrt{3})m$ है।

18. एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई 4cm है तथा इसके तृतीय सिरों के परिमाण 18cm और 6cm है। इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:—



दिया गया है- छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई = $l=4$ cm

$$2\pi r_1 = 6 \text{ cm} \Rightarrow r_1 = \frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$$

$$2\pi r_2 = 18 \text{ cm} \Rightarrow r_2 = \frac{18}{2\pi} = \frac{9}{\pi}$$

छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi l (r_1 + r_2)$$

$$= \pi \times 4 \left(\frac{3}{\pi} + \frac{9}{\pi} \right)$$

$$= \pi \times 4 \left(\frac{3+9}{\pi} \right)$$

$$= \pi \times 4 \times \frac{12}{\pi} = 48 \text{ cm}^2 \text{ Ans..}$$

19. निम्न आँकड़ों से माध्य ज्ञात कीजिए:

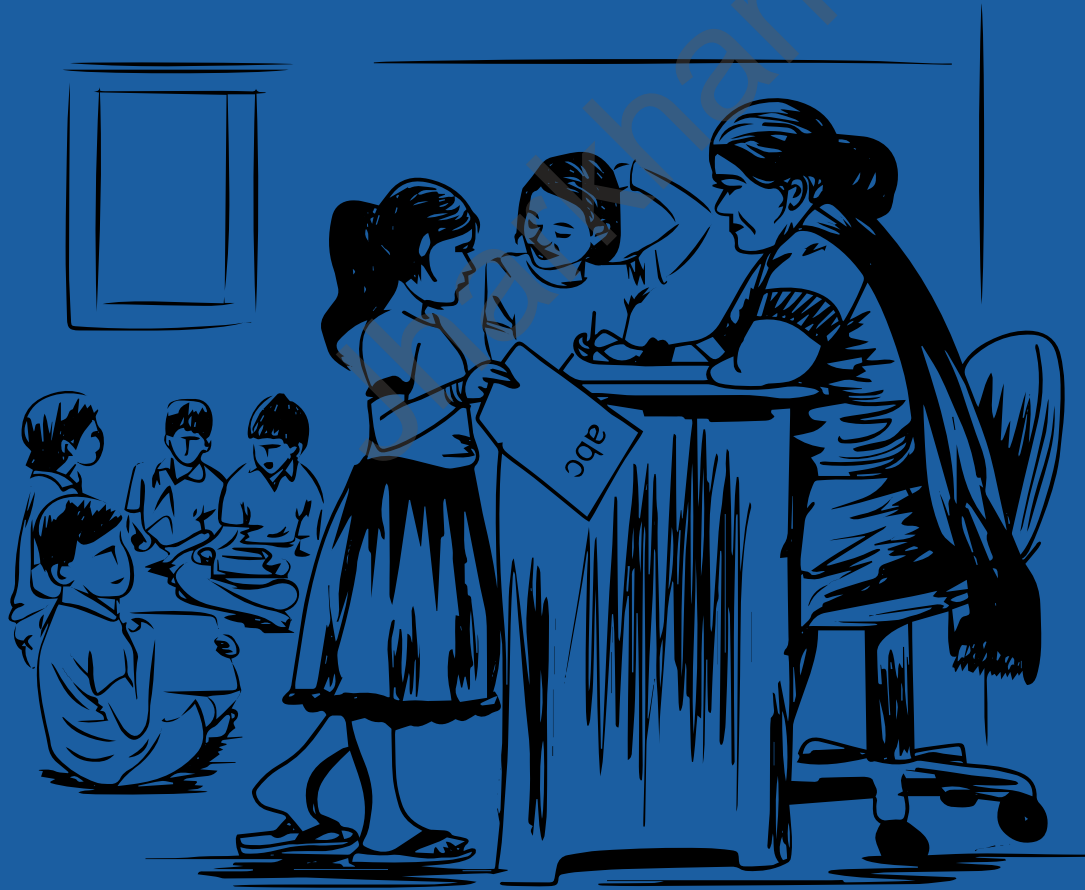
वर्ग अंतराल	45-55	55-65	65-75	75-85	85-95
बारंबरता	3	10	11	8	3

हल:—

वर्ग अंतराल	बारंबरता (f_i)	वर्ग चिन्ह (x_i)	$f_i x_i$
45-55	3	50	150
55-65	10	60	600
65-75	11	70	770
75-85	8	80	640
85-95	3	90	270
योग	35		2430

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{2430}{35} = 69.42 \text{ (लगभग)}$$

अतः दिए गए आँकड़ों का माध्य 69.42 (लगभग) है।



झारखण्ड शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद्, राँची
Jharkhand Council of Educational Research and Training, Ranchi